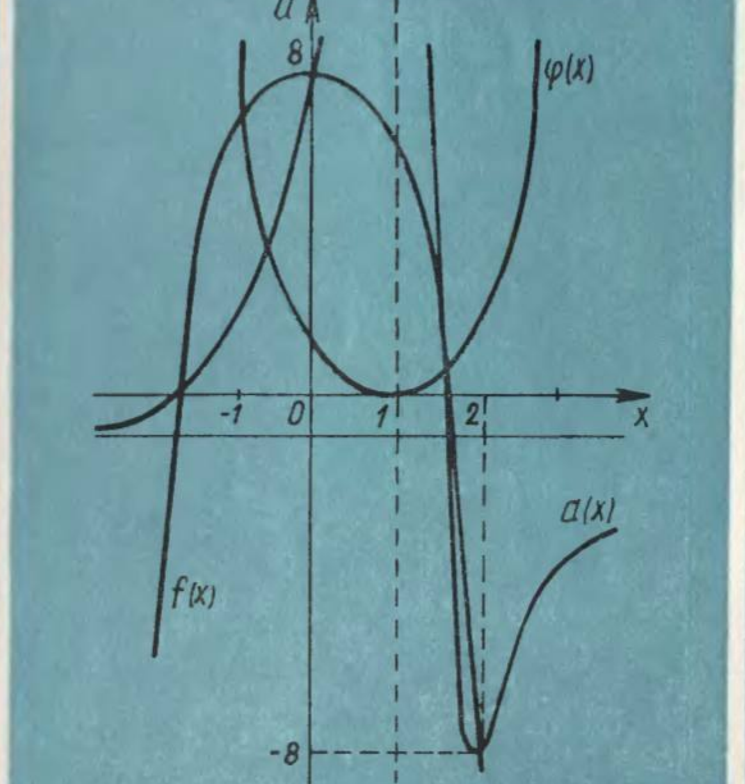
А. Б. Василевский

ОБУЧЕНИЕ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ



А. Б. Василевский

ОБУЧЕНИЕ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Рекомендовано Министерством просвещения СССР
в качестве учебного пособия
для студентов педагогических институтов
по физико-математическим специальностям

Минск "Вышэйшая школа" 1988

ББК 22.10я73
В19
УДК 51 (075.8)

Рецензенты: кафедра методики преподавания математики ЛГПИ имени А.И. Герцена; профессор *Г.Н. Скобелев*

Василевский А.Б.

В19 Обучение решению задач по математике: Учеб. пособие для пед. ин-тов. — Мн.: Выш. шк., 1988. — 255 с.: ил.

ISBN 5–339–00004–4.

Рассматриваются методы решения задач элементарной математики. Приводятся общие и частные алгоритмы поиска решения нестандартных уравнений и неравенств, геометрических и других задач. Описывается комплексное использование различных методов при решении задач повышенной трудности.

Для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов. Может быть использовано при проведении практикумов, спецкурсов и спецсеминаров.

В $\frac{1702010000 - 015}{М304 (03) - 88}$ 5–88 ББК 22.10я73

ISBN 5–339–00004–4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга представляет собой учебное пособие для студентов физико-математических специальностей педагогических институтов, программы которых предусматривают проведение практикума по решению математических задач. Он состоит из четырех частей: алгебры, геометрии, тригонометрии, конкурсных и олимпиадных задач.

Многие темы, непосредственно связанные с преподаванием математики в средней школе, изучаются в вузовских курсах алгебры, математического анализа и геометрии, поэтому практикум по алгебре, геометрии и тригонометрии включает только темы, недостаточно представленные в этих курсах, но занимающие важное место в школьной математике. При изложении материала учитывалось, что нужный для решения задач теоретический материал студенты изучают в названных курсах.

Цель учебного пособия — научить студента решать самые разнообразные задачи, раскрыть те принципиальные положения методики обучения решению задач, овладение которыми является важным моментом при подготовке будущего учителя математики.

В учебном пособии рассматриваются общие и частные методы решения тех математических задач, которые имеются в школьных учебниках и с которыми встречаются учащиеся на олимпиадах, конкурсных экзаменах, факультативных занятиях и т.д. Особое внимание уделяется методике обучения поиску путей решения задач различной трудности.

Обучение учащихся математической деятельности в процессе решения задач является неотъемлемой частью обучения математике, поэтому в книге много внимания уделяется комплексному использованию конструктивных, графических и аналитических методов, поиску гипотез, обнаружению свойств различных числовых и точечных множеств. В процессе работы над задачами студент должен ознакомиться с различными общими и частными методами их решения и приобрести навыки поиска путей применения этих методов. Значительное место занимает описание методики работы над нестандартными задачами. В книге сформулированы основные приемы проверки решений различных алгебраических и геометрических задач.

Система обучения решению задач включает изучение методов их решения; обучение методам поиска решений параллельно с изучением соответствующих методов решения задач; систематические упражнения в решении целесообразно подобранных заданий.

Общеизвестна роль дополнительных построений при решении самых разнообразных задач по планиметрии и стереометрии. В книге показывается, что такие построения не только упрощают решения, но и являются хорошим средством развития конструктивных и комбинаторных способностей учащихся.

Пособие может быть использовано также на спецкурсах и семинарах по методике обучения решению задач, при проведении кружковых и факультативных занятий в средней школе.

Автор искренне благодарен рецензентам кандидатам педагогических наук Х.Б. Абуговой, Е.И. Лященко, а также профессору Г.Н. Скобелеву, высказавшим ценные замечания, которые способствовали улучшению содержания рукописи.

Все советы и пожелания просим направлять по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство "Вышэйшая школа".

Автор

1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

1.1. Разложение на множители

Выражение с переменной раскладывается на множители. После этого показывается, что данное выражение и делитель имеют общие множители. При решении задач этим методом часто используют следующие формулы:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}), \qquad (1.1)$$

где n — натуральное число;

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + (-1)^{n-1}b^{n-1}), \qquad (1.2)$$

где $n = 2k+1$, k — любое натуральное число.

Чтобы убедиться в справедливости формул (1.1) и (1.2), достаточно перемножить выражения, стоящие в скобках.

Задача 1. Доказать, что $17^n - 11^n$ делится на 6 при любом натуральном n.

По формуле (1.1) $17^n - 11^n = (17-11)\ (17^{n-1} + 17^{n-2}\cdot 11 + \ldots + 11^{n-1})$. Утверждение задачи доказано.

Задача 2. Доказать, что $2\cdot 7^n + 1$ делится на 3 при любом натуральном n.

Так как $2\cdot 7^n + 1 = 2(7^n - 1) + 3$ и делимость $7^n - 1$ на 3 следует из формулы (1.1), утверждение задачи доказано.

Задача 3. Доказать, что $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ делится на 7 при любом натуральном n.

Очевидно, что $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 9^n\cdot 3 + 2^n\cdot 4 = 3(9^n - 2^n) + 3\cdot 2^n + 4\cdot 2^n = 3\ (9^n - 2^n) + 7\cdot 2^n$. Согласно формуле (1.1), число $9^n - 2^n$ делится на 7. Число $7\cdot 2^n$ также делится на 7. Задача решена.

1.2. Метод математической индукции

Математическая индукция — метод доказательства, основанный на следующем принципе: 1) некоторое свойство X верно при $k = 1$; 2) из предположения, что свойством X обладает какое-либо натуральное число $k > 1$, следует, что этим свойством обладает число $k+1$; тогда свойство X имеет всякое натуральное число.

Задача 1. Доказать, что $8^n + 6$ кратно 7 при любом целом $n \geqslant 1$.

При $n = 1$ утверждение задачи верно. Допустим, что оно верно при $n = k$ $(k > 1)$, т.е.

$$8^k + 6 = 7m, \qquad (1.3)$$

где m — натуральное число.

Проверим теперь, что утверждение задачи верно и при $n = k+1$, т.е. верно равенство

$$8^{k+1} + 6 = 7t\,, \tag{1.4}$$

где t — натуральное число.

Из равенства (1.3) получаем $8^k = 7m - 6$. Поэтому $8^{k+1} + 6 = 8 \cdot 8^k + 6 = 8(7m - 6) + 6 = 7 \cdot 8m - 42 = 7(8m - 6)$, т.е. $t = 8m - 6$.

Таким образом, t — натуральное число, следовательно, согласно равенству (1.4), утверждение задачи доказано.

З а д а ч а 2. Доказать, что при любом натуральном n выражение $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ делится на 11.

При $n = 1$ утверждение задачи верно. Допустим, что это утверждение верно при $n = k$ $(k > 1)$, т.е.

$$3^{2k+2} + 2^{6k+1} = 11m\,, \tag{1.5}$$

где m — натуральное число.

Докажем, что утверждение задачи верно и при $n = k + 1$, т.е.

$$3^{2(k+1)+2} + 2^{6(k+1)+1} = 11p\,, \tag{1.6}$$

где p — натуральное число.

Из равенства (1.5)

$$3^{2k+2} = 11m - 2^{6k+1}\,. \tag{1.7}$$

С учетом равенства (1.7) сумму $3^{2(k+1)+2} + 2^{6(k+1)+1}$ можно преобразовать к виду

$$3^{2(k+1)+2} + 2^{6(k+1)+1} = 3^2 \cdot 3^{2(k+1)} + 2^{6(k+1)+1} =$$

$$= 3^2(11m - 2^{6k+1}) + 2^{6(k+1)+1} = 3^2 \cdot 11m -$$

$$- 3^2 \cdot 2 \cdot 2^{6k} + 2^7 \cdot 2^{6k} = 3^2 \cdot 11m + 2^{6k}(2^7 - 2 \cdot 3^2) = 3^2 \cdot 11m +$$

$$+ 2^{6k} \cdot 110 = 11(9m + 10 \cdot 2^{6k})\,.$$

Итак, доказана справедливость равенства (1.6); $p = 9m + 10 \cdot 2^{6k}$.

1.3. Метод остатков

Пусть N_1 и N_2 — натуральные числа и $N = N_1 + N_2$. Если $N_1 = qn_1 + p_1$ и $N_2 = qn_2 + p_2$ (q, n_1, n_2, p_1, p_2 — натуральные числа), то $N = (qn_1 + p_1) + (qn_2 + p_2) = q(n_1 + n_2) + (p_1 + p_2)$. Поэтому число $N = N_1 + N_2$ делится без остатка на q, если сумма остатков p_1 и p_2 от деления N_1 и N_2 на q также делится на q, т.е. если $p_1 + p_2 = qk$ (k — натуральное число).

З а д а ч а 1. Доказать, что для любого натурального n число $2 \cdot 7^n + 1$ кратно 3

Очевидно, что $2 \cdot 7^n + 1 = 2(6 + 1)^n + 1$. После применения к $(6 + 1)^n$ формулы бинома Ньютона станет очевидным, что при делении $(6 + 1)^n$ на 3 получим в остатке 1. Следовательно, при делении $2 \cdot 7^n$ на 3 получаем в остатке 2. Итак, $2 \cdot 7^n + 1 = (3m + 2) + 1 = 3(m + 1)$.

З а д а ч а 2. Доказать, что ни при каком натуральном n выражение $21^{2n+1} + 17^{2n+1} + 15$ не делится на 19.

Очевидно, что $21^{2n+1} + 17^{2n+1} + 15 = (19+2)^{2n+1} + (19-2)^{2n+1} + 15$. Применив к выражениям $(19+2)^{2n+1}$ и $(19-2)^{2n+1}$ формулу бинома Ньютона, убедимся, что при делении $(19+2)^{2n+1}$ на 19 получим в остатке 2^{2n+1}, а при делении $(19-2)^{2n+1}$ на 19 получим в остатке $(-2)^{2n+1}$. Но $2^{2n+1} + (-2)^{2n+1} = 0$. Поэтому при делении выражения $21^{2n+1} + 17^{2n+1} + 15$ на 19 получаем в остатке 15. Утверждение задачи доказано.

1.4 Доказательство методом от противного

Допускаем, что утверждение задачи неверно, т.е. данное выражение с переменной не кратно данному натуральному числу. Полученное в результате этого допущения противоречие доказывает справедливость утверждения задачи.

З а д а ч а 1. Доказать, что ни при каком целом n выражение $n^2 + 3n + 5$ не делится на 121.

Допустим, что утверждение задачи неверно, т.е. существует такое целое число m, что

$$n^2 + 3n + 5 = 121m\,. \tag{1.8}$$

Решив уравнение (1.8) относительно n, получим

$$n_{1,2} = 0{,}5\left(-3 \pm \sqrt{11(44m-1)}\right).$$

По условию задачи n — целое число. Поэтому необходимо, чтобы $11(44m-1) = (11k)^2$, т.е. $44m - 1 = 11k^2$ (k — целое число). Левая часть последнего равенства ни при каком значении m не кратна 11, поэтому уравнение (1.8) не имеет целочисленных решений. Полученное противоречие и доказывает утверждение задачи.

2. МЕТОДИКА ПОИСКА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СВОЙСТВ ЧИСЕЛ

2.1. Пути поиска свойств чисел

В средней школе изучается очень ограниченный круг свойств рациональных чисел. Нестандартность большинства задач на доказательство числовых свойств как раз и объясняется тем, что, приступая к их решению, учащийся почти ничего не знает о свойствах рассматриваемых чисел. Работа над такими задачами проводится следующим образом.

Рассматривается несколько частных случаев общей задачи с тем, чтобы обнаружить некоторые свойства исследуемых чисел. После этого доказывается или опровергается полученная гипотеза. Если обнаруженных и доказанных свойств чисел оказывается недостаточно для решения задачи в полном объеме, продолжают рассматривать другие частные случаи до тех пор, пока не подмечают какое-либо новое свойство чисел, и т.д. При решении таких задач широко используется метод полной индукции.

Огромная обучающая ценность задач на доказательство свойств чисел заключается в том, что в процессе работы над ними учащийся приобретает навыки расчленения сложной задачи на более простые, выдвигает правдоподобные гипотезы, доказывает или опровергает их, занимается обобщением и конкретизацией, т.е. приобретает навыки научного поиска.

З а д а ч а 1. Найти сумму

$$S(n) = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!}. \qquad (2.1)$$

Решим задачу для нескольких значений n:

$$n=2, \quad S_2 = \frac{1}{2};$$

$$n=3, \quad S_3 = S_2 + \frac{2}{3!} = \frac{5}{6};$$

$$n=4, \quad S_4 = S_3 + \frac{3}{4!} = \frac{23}{24};$$

$$n=5, \quad S_5 = S_4 + \frac{4}{5!} = \frac{119}{120};$$

$$n=6, \quad S_6 = S_5 + \frac{5}{6!} = \frac{719}{720}.$$

Нетрудно заметить, что, во-первых, для всех полученных значений $S(n)$ числитель на 1 меньше знаменателя. Во-вторых, каждый последующий знаменатель получается из предыдущего следующим образом: $6 = 2\cdot 3 = 3!$, $24 = 6\cdot 4 = 4!$, $120 = 24\cdot 5 = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 5!$, $720 = 120\cdot 6 = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 6!$

Итак, вырисовывается гипотеза

$$S(n)=\frac{n!-1}{n!}. \tag{2.2}$$

Докажем (или опровергнем!) эту гипотезу методом математической индукции:

1) для $n=2$ формула (2.2) верна;

2) допустим, что

$$S(k)=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{k-1}{k!}=\frac{k!-1}{k!}; \tag{2.3}$$

3) находим $S(k+1)=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{k-1}{k!}+\frac{k}{(k+1)!}=$

$$=\frac{k!-1}{k!}+\frac{k}{(k+1)!}=\frac{(k!-1)(k+1)+k}{(k+1)!}=\frac{(k+1)!-1}{(k+1)!}.$$

Ответ. $S(n)=\frac{n!-1}{n!}$.

Интересно заметить, что $\lim\limits_{n\to+\infty} S(n)=1$.

Задача 2. Дано уравнение

$$x^3-3xy^2+y^3=n. \tag{2.4}$$

Доказать, что если натуральное n таково, что данное уравнение имеет целочисленное решение, то оно имеет по меньшей мере три целочисленных решения.

Попытаемся обнаружить некоторые свойства целочисленных решений уравнения вида (2.4).

1. Пусть, например, $(x_1; y_1)=(0;\ 1)$. Эта упорядоченная пара чисел является решением уравнения

$$x^3-3xy^2+y^3=1. \tag{2.5}$$

Легко заметить, что целочисленными решениями уравнения (2.5) являются также пары $(x_2; y_2)=(-1;\ -1)$ и $(x_3; y_3)=(1;\ 0)$.

2. Пара $(x_1; y_1)=(2;\ 1)$ является решением уравнения

$$x^3-3xy^2+y^3=3. \tag{2.6}$$

В результате подбора убеждаемся, что целочисленными решениями уравнения (2.6) будут также пары $(x_2; y_2)=(-1;\ 1)$ и $(x_3; y_3)=(-1;\ -2)$.

3. Пара $(x_1; y_1)=(3;\ 1)$ есть решение уравнения

$$x^3-3xy^2+y^3=19. \tag{2.7}$$

Путем непосредственного подбора находим еще два целочисленных решения уравнения (2.7): $(x_2; y_2)=(-1;\ 2)$ и $(x_3; y_3)=(-2;\ -3)$.

4. Пара $(x_1; y_1)=(3;\ -1)$ является решением уравнения

$$x^3-3xy^2+y^3=17. \tag{2.8}$$

Путем подбора находим еще два решения уравнения (2.8) : $(x_2;\ y_2) = (1;\ 4)$ и $(x_3;\ y_3) = (-4;\ -3)$.

5. Пара $(x_1;\ y_1) = (4;\ -1)$ есть решение уравнения

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = 51. \tag{2.9}$$

Подбором находим еще два целочисленных решения уравнения (2.9): $(x_2;\ y_2) = (1;\ 5)$ и $(x_3;\ y_3) = (-5;\ -4)$.

В результате сравнения вторых и третьих целочисленных решений с первыми в каждом из пяти рассмотренных случаев приходим к гипотезе:

$$(x_2;\ y_2) = (-y_1;\ x_1 - y_1); \tag{2.10}$$

$$(x_3;\ y_3) = (y_1 - x_1;\ -x_1). \tag{2.11}$$

Проверяем эту гипотезу на следующем примере: если $(x_1;\ y_1) = (20;\ 3)$, то

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = 7487. \tag{2.12}$$

Получив по формулам (2.10) и (2.11) пары $(x_2;\ y_2) = (-3;\ 17)$ и $(x_3;\ y_3) = (-17;\ -20)$, убеждаемся, что $(-3;\ 17)$ и $(-17;\ -20)$ являются решениями уравнения (2.12).

Докажем справедливость формул (2.10) и (2.11). (Очевидно, что если n — натуральное число, то второе и третье решения уравнения не совпадают с первым.)

Пусть верно равенство $x_1^3 - 3x_1y_1^2 + y_1^3 = n$. Тогда $(-y_1)^3 - 3(-y_1) \times (x_1 - y_1)^2 + (x_1 - y_1)^3 = x_1^3 - 3x_1y_1^2 + y_1^3$ и $(y_1 - x_1)^3 - 3(y_1 - x_1) \times (-x_1)^2 + (-x_1)^3 = x_1^3 - 3x_1y_1^2 + y_1^3$.

З а д а ч а 3. Известно, что последними цифрами квадратов натуральных чисел могут быть лишь цифры 0, 1, 4, 5, 6 и 9. Верно ли, что перед последней цифрой в них может встретиться любая группа цифр, т.е. что для любого набора из n цифр $a_1, a_2, \ldots, a_n$ можно найти натуральное число, квадрат которого оканчивается цифрами $a_1a_2 \ldots a_nb$ (b — одна из перечисленных выше цифр) ?

Для того чтобы получить дополнительные сведения о свойствах квадратов натуральных чисел, составим следующую таблицу:

$1^2 = 1$	$13^2 = 169$	$25^2 = 625$	$37^2 = 1369$	$49^2 = 2401$
$2^2 = 4$	$14^2 = 196$	$26^2 = 676$	$38^2 = 1444$	$50^2 = 2500$
$3^2 = 9$	$15^2 = 225$	$27^2 = 729$	$39^2 = 1521$	$51^2 = 2601$
$4^2 = 16$	$16^2 = 256$	$28^2 = 784$	$40^2 = 1600$	$52^2 = 2704$
$5^2 = 25$	$17^2 = 289$	$29^2 = 841$	$41^2 = 1681$	$53^2 = 2809$
$6^2 = 36$	$18^2 = 324$	$30^2 = 900$	$42^2 = 1764$	$54^2 = 2916$
$7^2 = 49$	$19^2 = 361$	$31^2 = 961$	$43^2 = 1849$	$55^2 = 3025$
$8^2 = 64$	$20^2 = 400$	$32^2 = 1024$	$44^2 = 1936$	$56^2 = 3136$
$9^2 = 81$	$21^2 = 441$	$33^2 = 1089$	$45^2 = 2025$	$57^2 = 3249$
$10^2 = 100$	$22^2 = 484$	$34^2 = 1156$	$46^2 = 2116$	$58^2 = 3364$
$11^2 = 121$	$23^2 = 529$	$35^2 = 1225$	$47^2 = 2209$	$59^2 = 3481$
$12^2 = 144$	$24^2 = 576$	$36^2 = 1296$	$48^2 = 2304$	$60^2 = 3600$

$61^2 = 3721$	$74^2 = 5476$	$87^2 = 7569$	$100^2 = 10000$	$113^2 = 12769$
$62^2 = 3844$	$75^2 = 5625$	$88^2 = 7744$	$101^2 = 10201$	$114^2 = 12996$
$63^2 = 3969$	$76^2 = 5776$	$89^2 = 7921$	$102^2 = 10404$	$115^2 = 13225$
$64^2 = 4096$	$77^2 = 5929$	$90^2 = 8100$	$103^2 = 10609$	$116^2 = 13456$
$65^2 = 4225$	$78^2 = 5984$	$91^2 = 8281$	$104^2 = 10816$	$117^2 = 13689$
$66^2 = 4356$	$79^2 = 6241$	$92^2 = 8464$	$105^2 = 11025$	$118^2 = 13924$
$67^2 = 4489$	$80^2 = 6400$	$93^2 = 8649$	$106^2 = 11236$	$119^2 = 14161$
$68^2 = 4604$	$81^2 = 6561$	$94^2 = 8836$	$107^2 = 11449$	$120^2 = 14400$
$69^2 = 4761$	$82^2 = 6724$	$95^2 = 9025$	$108^2 = 11664$	$121^2 = 14641$
$70^2 = 4900$	$83^2 = 6889$	$96^2 = 9216$	$109^2 = 11881$	$122^2 = 14884$
$71^2 = 5041$	$84^2 = 7056$	$97^2 = 9409$	$110^2 = 12100$	$123^2 = 15129$
$72^2 = 5184$	$85^2 = 7225$	$98^2 = 9604$	$111^2 = 12321$	$124^2 = 15376$
$73^2 = 5329$	$86^2 = 7396$	$99^2 = 9801$	$112^2 = 12544$	$125^2 = 15625$

Проанализировав таблицу, можно сделать следующие выводы:

1) если последняя цифра квадрата натурального числа 0, перед ней всегда стоит 0;

2) если последняя цифра квадрата 1, перед ней встречаются только 0, 2, 4, 6, 8, т.е. только четные цифры;

3) если последняя цифра квадрата 4, перед ней встречаются только четные цифры;

4) если последняя цифра квадрата 5, перед ней стоит только цифра 2;

5) если квадрат натурального числа оканчивается цифрой 6, перед ней стоит нечетная цифра;

6) если квадрат натурального числа оканчивается цифрой 9, перед ней стоит четная цифра.

Эти шесть свойств квадратов натуральных чисел легко доказываются, так как последние две цифры квадрата определяются только двумя последними цифрами числа, возводимого в квадрат.

Общий вывод: для любого набора из n цифр $a_1, a_2, \ldots, a_n$ нельзя найти целое число, квадрат которого оканчивается цифрами $a_1 a_2 \ldots a_n b$ (цифра b равна 0, 1, 4, 5, 6, 9).

2.2. Определение целых корней уравнений

Решение уравнения относительно одной из переменных. Уравнение с несколькими переменными $F(x, y, \ldots, u, v) = 0$ решается относительно одной из этих переменных, например v. После этого исследуется функция с многими переменными $v = f(x, y, z, \ldots, u)$.

З а д а ч а 1. Найти натуральные корни уравнения

$$17(xyzt + xy + xt + zt + 1) - 54(yzt + y + t) = 0.$$

Решим это уравнение относительно x:

$$17x = 54 - 17(zt + 1) : (yzt + y \cdots$$

Отсюда

$$54 - 17x \quad \frac{17}{y + t/(zt + 1)}. \qquad (2.13)$$

Правая часть уравнения (2.13) положительная. Поэтому x может быть равным 1, 2 или 3. При $x = 1$ левая часть уравнения (2.13) равна 37, при $x = 2 - 20$, а при $x = 3 - 3$. Итак, теперь нужно решить в натуральных числах уравнения:

$$37 = \frac{17}{y + t/(zt + 1)}; \qquad (2.14)$$

$$20 = \frac{17}{y + t/(zt + 1)}; \qquad (2.15)$$

$$3 = \frac{17}{y + t/(zt + 1)}. \qquad (2.16)$$

Из уравнения (2.14) получаем

$$37t/(zt + 1) = 17 - 37y. \qquad (2.17)$$

Так как при $y \geqslant 1$ правая часть уравнения (2.17) отрицательна, это уравнение не имеет натуральных решений.

Аналогично показывается, что и уравнение (2.17) не имеет натуральных корней.

Из уравнения (2.16) $17 - 3y = 3/(z + 1/t)$. Очевидно, что $0 < 3/(z + 1/t) < 3$, где z и t – натуральные числа. Поэтому $0 < 17 - 3y < 3$. Отсюда $y = 5$. Тогда $3/(z + 1/t) = 2$, т.е. $z + 1/t = 1 + 0{,}5$. Следовательно, $z = 1$, $t = 2$.

Ответ. $x = 3, z = 1, t = 2, y = 5$.

Разложение на множители выражений, входящих в уравнение. Сущность этого метода состоит в том, что обе части уравнения раскладываются на множители. После этого данное уравнение заменяется системой некоторых уравнений.

З а д а ч а 2. Доказать, что уравнение $x^3 - 5x^2 = 13$ не имеет решений в натуральных числах.

Преобразуем данное уравнение к виду

$$x \cdot x\,(x - 5) = 1 \cdot 1 \cdot 13. \qquad (2.18)$$

Уравнение (2.18) равносильно системе уравнений $x = 1$ и $x - 5 = 13$. Эта система натуральных решений не имеет (она противоречива).

З а д а ч а 3. Найти целые числа x и y, такие, что $x > y > 0$ и

$$x^3 + 7y = y^3 + 7x. \qquad (2.19)$$

Преобразуем это уравнение: $x^3 - y^3 = 7x - 7y$ или $(x - y)\,(x^2 + xy + y^2) = 7(x - y)$.

Так как $x > y$, уравнение (2.19) равносильно уравнению $x^2 + y^2 + xy = 7$ или $(x - y)^2 = 7 - 3xy$. Теперь ясно, что $7 - 3xy > 0$, т.е. $xy < 7/3$. Но это возможно только в следующих случаях: 1) $x = 1, y = 2$; 2) $x = 2, y = 1$. Окончательно получаем $x = 2, y = 1$, так как по условию задачи $x > y$.

2.3. Поиск решений нестандартных уравнений

При решении нестандартных уравнений применяются следующие основные приемы: разложение на множители выражений с переменными; исследование свойств выражений, входящих в уравнения; исследование свойств выражений с переменными на различных множествах их определения.

З а д а ч а 1. Найти хотя бы одно решение уравнения

$$a^3 + b^4 = c^5 \tag{2.20}$$

в натуральных числах.

Что целесообразно принять за рабочую гипотезу, следуя которой можно наметить пути поиска решения? Составим табл. 2.1.

Таблица 2.1

n	n^3	n^4	n^5	n	n^3	n^4	n^5
1	1	1	1	9	729	6561	59049
2	8	16	32	10	1000	10000	100000
3	27	81	243	11	1331	14641	161051
4	64	256	1024	12	1728	20736	248832
5	125	625	3125	13	2197	28561	371293
6	216	1296	7776	14	2744	38416	537824
7	343	2401	16807	15	3375	50625	759375
8	512	4096	32768				

Из табл. 2.1 видно, что, во-первых, уравнение

$$n^3 + n^4 = n^5 \tag{2.21}$$

не имеет натуральных решений. В самом деле, из уравнения (2.21) следует, что $n^3(1 + n - n^2) = 0$, а это уравнение не имеет натуральных решений. Во-вторых, очевидно, что $a > c$ или $b > c$. В-третьих, числа n^5 оканчиваются той цифрой, которой оканчивается и число n. Число n^4 оканчивается цифрой 0, 1, 5 или 6. В-четвертых, если n – нечетное число, то n^3, n^4 и n^5 – нечетные числа. Если n – четное, то n^3, n^4, n^5 – четные числа.

Допустим, что $a = 2k$, $b = 2p$, $c = 2m$. Тогда получим следующую последовательность уравнений:

$$(2k)^3 + (2p)^4 = (2m)^5,\ 8k^3 + 16p^4 = 32m^5,\ k^3 + 2p^4 = 4m^5.$$

Отсюда следует, что $k = 2l$, $8l^3 + 2p^4 = 4m^5$, $4l^3 + p^4 = 2m^5$ и т.д.

Теперь становится понятным, что $a = 2^x$, $b = 2^y$, $c = 2^z$ (x, y, z – натуральные числа). Из уравнения (2.20) следует $2^{3x} + 2^{4y} = 2^{5z}$ или $2^{5z}(2^{3x-5z} + 2^{4y-5z}) = 2^{5z}$. Отсюда $2^{3x-5z} + 2^{4y-5z} = 1$. Так как x, y, z – натуральные числа, последнее уравнение равносильно следующей системе уравнений: $3x - 5z = -1$, $4y - 5z = -1$. Отсюда $z = 0{,}2(3x + 1) = 0{,}2(4y + 1)$. Теперь ясно, что $x = 8$, $y = 6$, $z = 5$. Итак, $a = 2^8$, $b = 2^6$, $c = 2^5$.

З а д а ч а 2. Найти все решения в натуральных числах уравнения

$$y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x. \tag{2.22}$$

Преобразуем уравнение (2.22) следующим образом:

$$\begin{aligned} &y(y+1) = x^3(x+1) + x(x+1); \\ &y(y+1) = (x+1)(x^2+1)x. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Далее попробуем угадать некоторые решения уравнения (2.23). При $x = 1$ уравнение $y(y+1) = 4$ натуральных решений не имеет. При $x = 2$ уравнение $y(y+1) = 30$ имеет решение $y = 5$. При $x = 3$ уравнение $y(y+1) = 120$ натуральных решений не имеет. При $x = 4$ уравнение $y(y+1) = 340$ также не имеет натуральных решений.

Анализ этих ситуаций наводит на мысль, что уравнение (2.23) имеет решения в натуральных числах, если имеет решение одна из систем уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &y = x; \\ &y+1 = (x+1)(x^2+1); \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &y = x+1; \\ &y+1 = x(x^2+1); \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &y = x^2+1; \\ &y+1 = (x+1)x. \end{aligned}\right\}$$

Решив эти системы уравнений, убедимся, что только третья из них имеет решение в натуральных числах: (2; 5).

3.1. Целые уравнения и неравенства

Основной путь решения целого уравнения — это замена его равносильной системой уравнений и неравенств.

З а д а ч а 1. Решить неравенство $x^2+2x-3|x+1|+3>0$.

Решение неравенства вида $a|f(x)|+b|\varphi(x)|-\psi(x)\geqslant 0$, содержащего переменную x под знаком абсолютной величины, сводится к решению следующих систем неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\geqslant 0;\\ \varphi(x)\geqslant 0;\\ af(x)+b\varphi(x)-\psi(x)\geqslant 0;\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} f(x)\leqslant 0;\\ \varphi(x)\geqslant 0;\\ af(x)-b\varphi(x)+\psi(x)\leqslant 0;\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\geqslant 0;\\ \varphi(x)\leqslant 0;\\ af(x)-b\varphi(x)-\psi(x)\geqslant 0;\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} f(x)\leqslant 0;\\ \varphi(x)\leqslant 0;\\ af(x)+b\varphi(x)+\psi(x)\leqslant 0.\end{array}\right\}$$

Данное неравенство заменяем равносильным ему:

$$x^2+2x-3|x+1|+3>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}x+1\geqslant 0;\\ x^2+2x-3(x+1)+3>0;\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{l}x+1<0;\\ x^2+2x-3(-x-1)+3>0\end{array}\right\}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}x+1\geqslant 0;\\ x^2-x>0;\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{l}x+1<0;\\ x^2+5x+6>0\end{array}\right\}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}x\geqslant -1;\\ x<0 \text{ или } x>1;\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{l}x<-1;\\ x<-3 \text{ или } x>-2.\end{array}\right\}\end{array}\right.$$

Ответ. $(-\infty;\ -3)\cup(-2;\ 0)\cup(1;\ +\infty)$.

З а д а ч а 2. Решить систему уравнений с тремя переменными:

$$\left.\begin{array}{l}x^2+xy+4xz-4z^2=0;\\ y^2+xy+4yz-8z^2=0;\\ xyz=8.\end{array}\right\}\qquad(3.1)$$

Решение системы уравнений (неравенств) сводится к замене данной системы равносильной ей системой уравнений (неравенств). Основные приемы равносильного преобразования систем уравнений (неравенств): способы подстановки, почленного сложения (вычитания), почленного умножения (деления).

Из третьего уравнения системы (3.1) следует, что $x, y, z \neq 0$. Поэтому после почленного умножения первого уравнения на y, второго на x получаем систему уравнений, равносильную данной:

$$\left.\begin{aligned} &x^2y + xy^2 + 4xyz - 4z^2y = 0; \\ &xy^2 + x^2y + 4xyz - 8z^2x = 0; \\ &xyz = 8. \end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

После почленного вычитания второго уравнения из первого получаем систему уравнений, равносильную системе (3.2):

$$\left.\begin{aligned} &xy^2 + x^2y + 4xyz - 4z^2y = 0; \\ &4z^2(2x - y) = 0; \\ &xyz = 8. \end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

Из второго уравнения системы (3.3) следует, что $y = 2x$. Теперь систему уравнений (3.3) можно заменить равносильной ей системой:

$$\left.\begin{aligned} &4x^3 + 2x^3 + 4\cdot 8 - 4z^2\cdot 2x = 0; \\ &y = 2x; \\ &2x^2z = 8 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} &3x^3 - 4xz^2 = -16; \\ &y = 2x; \\ &x^2z = 4 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} &3x^3 - 4x(16/x^4) = -16; \\ &y = 2x; \\ &z = 4/x^2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} &3x^3 - 64/x^3 = -16; \\ &y = 2x; \\ &z = 4/x^2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &x^3 = -8; \\ &y = 2x; \\ &z = 4/x^2; \end{aligned}\right\} \\ &\left.\begin{aligned} &x^3 = 8/3; \\ &y = 2x; \\ &z = 4/x^2 \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &x = -2; \\ &y = -4; \\ &z = 1; \end{aligned}\right\} \\ &\left.\begin{aligned} &x = 2/\sqrt[3]{3}; \\ &y = 4/\sqrt[3]{3}; \\ &z = \sqrt[3]{9}. \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right.$$

Ответ. $\left\{(-2;\ -4;\ 1),\ (2/\sqrt[3]{3};\ 4/\sqrt[3]{3};\ \sqrt[3]{9})\right\}$.

З а д а ч а 3. Решить систему уравнений (a — параметр)

$$x^3 = 2ax + ay; \qquad (3.4)$$

$$y^3 = ax + 2ay. \qquad (3.5)$$

Очевидно, что если $a = 0$, то $x = y = 0$. Преобразуем уравнения (3.4) и (3.5):

$$x^3 = a(2x + y); \qquad (3.6)$$

$$y^3 = a(x + 2y) \qquad (3.7)$$

Отсюда ясно, что если $2x + y = x + 2y = 0$, то $x = y = 0$ (при любом значении параметра a), т.е. пара (0; 0) является решением данной системы уравнений при любом значении параметра a.

Решив уравнения (3.6) и (3.7) относительно a, имеем: $a = \dfrac{x^3}{2x+y}$, $a = \dfrac{y^3}{x+2y}$. $(x, y \neq 0, a \neq 0)$. Отсюда $\dfrac{x^3}{2x+y} = \dfrac{y^3}{x+2y}$ или

$$x^4 + 2x^3y - 2xy^3 - y^4 = 0 \quad (x, y, a \neq 0). \tag{3.8}$$

Разделив обе части уравнения (3.8) на y^4 и обозначив $x/y = t$, получим $t^4 + 2t^3 - 2t - 1 = 0$ или

$$(t^4 - 1) + 2t(t^2 - 1) = 0; \quad (t^2 - 1)(t + 1)^2 = 0. \tag{3.9}$$

Найдем корни уравнения (3.9): $t_1 = 1$, $t_2 = -1$. Отсюда

$$y = x \quad \text{или} \quad y = -x. \tag{3.10}$$

Из равенств (3.4), (3.5) и (3.10) получаем $x^3 = 3ax$ или $x^3 = ax$. Отсюда $x^2 = 3a$ или $x^2 = a$ (случай $x = y = 0$ уже был рассмотрен). Уравнения $x^2 = 3a$ и $x^2 = a$ имеют решения, если $a \geqslant 0$.

Ответ. 1) $x = y = 0$ (при любом значении параметра a); 2) если $a \geqslant 0$, данная система уравнений имеет четыре решения: $(\sqrt{3a}; \sqrt{3a})$, $(-\sqrt{3a}; -\sqrt{3a})$, $(\sqrt{a}; -\sqrt{a})$, $(-\sqrt{a}; \sqrt{a})$.

3.2. Рациональные уравнения и неравенства

Рациональные уравнения (неравенства) в результате тождественных преобразований заменяются равносильными им уравнениями (неравенствами).

Задача 1. Решить относительно x неравенство

$$1/x + ax \geqslant 1. \tag{3.11}$$

Заменяем данное неравенство равносильным:

$$1/x + ax \geqslant 1 \Leftrightarrow 1/x + ax - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{ax^2 - x + 1}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{a(x - x_1)(x - x_2)}{x} \geqslant 0, \tag{3.12}$$

где $x_1 = (1 + \sqrt{1 - 4a})/2a$; $x_2 = (1 - \sqrt{1 - 4a})/2a$, $a \neq 0$.

Очевидно, что x_1 и x_2 — действительные числа, если $0 < a \leqslant 0{,}25$ или $a < 0$. Если $a = 0{,}25$, то $x_1 = x_2 = 2$, т.е. неравенство (3.11) имеет вид

$$1/x + 0{,}25x \geqslant 1. \tag{3.13}$$

Если $a > 0{,}25$, уравнение $ax^2 - x + 1 = 0$ не имеет действительных корней. В этом случае $ax^2 - x + 1 > 0$ при всех действительных значениях x, поэтому неравенство (3.11) верно, если $x > 0$.

Если $a = 0$, неравенство (3.11) имеет вид $1/x \geqslant 1$. Отсюда $0 < x \leqslant 1$.

Решаем неравенство (3.13):

$$\left.\begin{array}{l} a = 0{,}25;\\ 1/x + 0{,}25x \geqslant 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} a = 0{,}25;\\ x > 0;\\ 4 + x^2 \geqslant 4x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} a = 0{,}25;\\ x > 0;\\ (x-2)^2 \geqslant 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} a = 0{,}25;\\ x \geqslant 2 \quad \text{или } 0 < x \leqslant 2. \end{array}\right\}$$

Решаем неравенство (3.12):

$$\frac{a(x-x_1)(x-x_2)}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 0 < a < 0{,}25;\\ \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{x} \geqslant 0;\\ x_1 > 0, x_2 > 0, x > 0 \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l} a < 0;\\ x_1 < 0, x_2 > 0;\\ \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{x} \leqslant 0 \end{array}\right\} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 0 < a < 0{,}25;\\ 0 < x \leqslant x_2 \text{ или } x \geqslant x_1 \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l} a < 0;\\ x \leqslant x_1 \text{ или } 0 < x \leqslant x_2 \end{array}\right\}. \end{array}\right.$$

Ответ. 1) $a < 0, x \leqslant x_1$ или $0 < x \leqslant x_2$; 2) $a = 0, 0 < x \leqslant 1$; 3) $0 < a < 0{,}25$, $x \geqslant x_1$ или $0 < x \leqslant x_2$; 4) $a = 0{,}25, 0 < x \leqslant 2$ или $x \geqslant 2$; 5) $a > 0{,}25, x > 0$.

3.3. Иррациональные уравнения и неравенства

Основной метод решения иррационального уравнения — это преобразование его в равносильное рациональное уравнение или систему рациональных уравнений и неравенств.

Задача 1. Решить неравенство

$$2\sqrt{x+1}/(1-2\sqrt{3-x}) < 1.$$

Заменяем данное неравенство равносильным ему:

$$2\sqrt{x+1}\,/\,(1-2\sqrt{3-x}) < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+1 \geqslant 0;\\ 3-x \geqslant 0;\\ \dfrac{2\sqrt{x+1}}{1-2\sqrt{3-x}} < 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -1 \leqslant x \leqslant 3;\\ \dfrac{2\sqrt{x+1}}{1-2\sqrt{3-x}} < 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} -1 \leqslant x \leqslant 3; \\ 1-2\sqrt{3-x} < 0; \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l} -1 \leqslant x \leqslant 3; \\ 1-2\sqrt{3-x} > 0; \\ 2\sqrt{x+1} < 1-2\sqrt{3-x} \end{array}\right\} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} -1 \leqslant x \leqslant 3; \\ x < 2{,}75; \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l} -1 \leqslant x \leqslant 3; \\ x > 2{,}75; \\ (2\sqrt{x+1})^2 < (1- \\ -2\sqrt{3-x})^2 \end{array}\right\} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leqslant x < 2{,}75; \\ \left.\begin{array}{l} 2{,}75 < x \leqslant 3; \\ 4\sqrt{3-x} < 9-8x. \end{array}\right\} \end{array}\right.$$

Ответ. $[-1; 2{,}75)$.

З а д а ч а 2. Решить относительно x уравнение

$$\sqrt{x^2-p} + 2\sqrt{x^2-1} = x.$$

Заменяем уравнение равносильным:

$$\sqrt{x^2-p} + 2\sqrt{x^2-1} = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-p \geqslant 0; \\ x^2-1 \geqslant 0; \\ x \geqslant 0; \\ (\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1})^2 = x^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 \geqslant p; \\ x^2 \geqslant 1; \\ x \geqslant 0; \\ 4\sqrt{x^2-p}\sqrt{x^2-1} = \\ = 4-4x^2+p \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 \geqslant p; \\ x \geqslant 1; \\ 4-4x^2+p \geqslant 0; \\ 16(x^2-p)(x^2-1) = (4-4x^2+p)^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 \geqslant p; \\ x \geqslant 1; \\ x^2 \leqslant (p+4)/4; \\ x^2 = (4-p)^2/8(2-p); \\ p < 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 = (4-p)^2/8(2-p); \\ p \leqslant (4-p)^2/8(2-p) \leqslant (p+4)/4; \\ x \geqslant 1; \\ p < 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}; \\ 0 \leqslant p \leqslant 4/3; \\ x \geqslant 1; \\ p < 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &x = (4-p)/2\sqrt{2(2-p)};\\ \Leftrightarrow\quad &0 \leqslant p \leqslant 4/3;\\ &(4-p)/2\sqrt{2(2-p)} \geqslant 1 \end{aligned}\right\} \quad\Leftrightarrow\quad \left.\begin{aligned} &x = (4-p)/2\sqrt{2(2-p)};\\ &0 \leqslant p \leqslant 4/3. \end{aligned}\right\}$$

Ответ. $\left\{(4-p)/2\sqrt{2(2-p)}\right\}$, $\quad 0 \leqslant p \leqslant 4/3.$

Задача 3. Определить, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\left.\begin{aligned} &3y - a\sqrt{x^2+1} = 1; &(3.14)\\ &x + y + \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = a^2 &(3.15) \end{aligned}\right\}$$

имеет единственное решение.

Естественно избавиться от иррациональности в знаменателе уравнения (3.15). Для этого преобразуем его левую часть:

$$x + y + \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{(x+\sqrt{x^2+1})\,(x-\sqrt{x^2+1})} = x + y - (x-\sqrt{x^2+1}) =$$

$$= y + \sqrt{x^2+1}.$$

После этого данная система уравнений заменяется равносильной ей системой

$$\left.\begin{aligned} &3y - a\sqrt{x^2+1} = 1;\\ &y + \sqrt{x^2+1} = a^2. \end{aligned}\right\} \qquad (3.16)$$

Функции $f(x) = 3y - a\sqrt{x^2+1}$ и $\varphi(x) = y + \sqrt{x^2+1}$ четные. Поэтому если система уравнений (3.16) имеет единственное решение, то $x = 0$, т.е.

$$\left.\begin{aligned} &3y - a = 1;\\ &y + 1 = a^2. \end{aligned}\right\} \qquad (3.17)$$

Из системы уравнений (3.17) получаем $3(a^2-1) - a = 1$. Корни этого уравнения: $a_1 = -1$, $a_2 = 4/3$.

Ответ. $a = -1$ или $a = 4/3$.

3.4. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

Основные свойства показательных и логарифмических функций. Решение простейшего показательного уравнения $a^x = b$ основано на следующем свойстве степени: если степени двух чисел при одном и том же основании a ($a > 0$, $a \neq 1$) равны, то равны и сами числа.

Решение простейшего логарифмического уравнения $\log_a x = b$ основано на таком свойстве логарифма: если логарифмы двух положительных чисел по одному и тому же основанию a $(a>0, a\neq 1)$ равны, то равны и сами эти числа.

Решение простейших показательного и логарифмического неравенств $a^x<b$, $\log_a x\leqslant b$ основано на следующем свойстве показательной и логарифмической функций:

$$(a^x<b, 0<a<1)\Leftrightarrow x>\log_a b;$$

$$(a^x<b, a>1)\Leftrightarrow x<\log_a b;\quad (\log_a x<b, 0<a<1)\Leftrightarrow x>a^b;$$

$$(\log_a x<b, a>1)\Leftrightarrow x<a^b.$$

З а д а ч а 1. Решить неравенство $\log_2(x-1)+\log_2(x-2)\leqslant\log_2(x+2)$.

Заменяем данное неравенство равносильным ему:

$$\log_2(x-1)+\log_2(x-2)\leqslant\log_2(x+2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} x-1>0;\\ x-2>0;\\ x+2>0;\\ \log_2((x-1)(x-2))\leqslant\log_2(x+2)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} x>2;\\ (x-1)(x-2)\leqslant x+2\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} x>2;\\ x^2-4x\leqslant 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} x>2;\\ 0\leqslant x\leqslant 4\end{array}\right\}\Leftrightarrow 2<x\leqslant 4.$$

Ответ. $(2; 4]$.

Сведéние логарифмического уравнения к целому или рациональному. Логарифмическое уравнение вида

$$\log_a^n x+m_1\log_a^{n-1}x+m_2\log_a^{n-2}x+\ldots+m_{n-1}\log_a x+m_n=0$$

(n — натуральное число, $0<a<1$ или $a>1$) путем замены $\log_a x=t$ сводится к целому уравнению относительно t.

З а д а ч а 2. Решить уравнение

$$\lg^3 x-\lg^2 x-6\lg x=0. \qquad (3.18)$$

Обозначим $\lg x=y$. Получим $y^3-y^2-6y=0$. Его корни: $y_1=0$, $y_2=-2$, $y_3=3$. Следовательно, уравнение (3.18) свелось к решению простейших уравнений: $\lg x=0$, $\lg x=-2$, $\lg x=3$. Решив эти уравнения, получим корни данного уравнения: 1; 0,01; 1000.

К рациональным сводятся и показательно-логарифмические уравнения. Для этого предварительно логарифмируются обе части такого уравнения.

З а д а ч а 3. Решить относительно x неравенство $\log_{0,5}(x^2-2x+a)>-3$.

Заменяем неравенство равносильным:

$$\log_{0,5}(x^2-2x+a) > -3 \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{matrix} x^2-2x+a>0; \\ x^2-2x+a<8. \end{matrix}\right\}$$

Вводим обозначения: $x_1 = 1-\sqrt{1-a}$, $x_2 = 1+\sqrt{1-a}$ — корни уравнения $x^2-2x+a=0$; $x_3 = 1-\sqrt{9-a}$, $x_4 = 1+\sqrt{9-a}$ — корни уравнения $x^2-2x+(a-8)=0$. Тогда последняя система неравенств равносильна следующей системе:

$$\left.\begin{matrix} (x-x_1)(x-x_2)>0; \\ (x-x_3)(x-x_4)<0 \end{matrix}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{matrix} \left.\begin{matrix} a\leqslant 1; \\ x<x_1 \text{ или } x>x_2; \\ x_3<x<x_4; \end{matrix}\right\} \\ \left.\begin{matrix} 1<a<9; \\ -\infty<x<+\infty; \\ x_3<x<x_4 \end{matrix}\right\} \end{matrix}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{matrix} \left.\begin{matrix} a\leqslant 1; \\ x_3<x<x_1 \text{ или } x_2<x<x_4; \end{matrix}\right\} \\ \left.\begin{matrix} 1<a<9; \\ x_3<x<x_4. \end{matrix}\right\} \end{matrix}\right.$$

Ответ. 1) $a\leqslant 1$, $(x_3;\, x_1)\cup(x_2;\, x_4)$; 2) $1<a<9$, $(x_3;\, x_4)$.

4. МЕТОДЫ НЕРАВНОСИЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

4.1. Неравносильное преобразование уравнений

Замена иррационального уравнения (путем возведения обеих его частей в четную степень) рациональным может привести к появлению уравнения, неравносильного данному. Посторонние корни могут возникнуть и при решении логарифмических и других видов уравнений, если в результате некоторых преобразований получаем уравнение, область определения которого шире области определения данного уравнения. Посторонние корни обнаруживаются при непосредственной их проверке, без выполнения которой решение уравнения не может считаться законченным. Если в результате некоторого преобразования получаем уравнение, область определения которого у́же, чем область определения данного уравнения, может произойти потеря корней данного уравнения.

З а д а ч а 1. Решить уравнение

$$\log_2 (x-1) + \log_2 (x-2) = \log_2 (x+2). \tag{4.1}$$

Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\log_2 ((x-1)(x-2)) = \log_2 (x+2);$$

$$(x-1)(x-2) = x+2; \tag{4.2}$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4.$$

При подстановке чисел 0 и 4 в уравнение (4.1) убеждаемся, что 0 не является его решением. Посторонний корень появился потому, что уравнения (4.1) и (4.2) неравносильны: из существования $\log_2 ((x-1)(x-2))$ не следует существование $\log_2 (x-1)$ и $\log_2 (x-2)$, так как $(x-1)(x-2) > 0$ и в том случае, когда $x-1 < 0$ и $x-2 < 0$.

З а д а ч а 2. Решить относительно x уравнение

$$2\sqrt{x^2-1} = x - \sqrt{x^2-a}. \tag{4.3}$$

Преобразуем уравнение (4.3):

$$(2\sqrt{x^2-1})^2 = (x-\sqrt{x^2-a})^2;\ 4x^2-4 = x^2 - 2x\sqrt{x^2-a} +$$

$$+ x^2 - a;$$

$$2x\sqrt{x^2-a} = -2x^2 + (4-a);\ (2x\sqrt{x^2-a})^2 =$$

$$= (-2x^2 + (4-a))^2;$$

$$x^2 = (4-a)^2/(16-8a). \tag{4.4}$$

Из равенства (4.4) ясно, что $a < 2$. Из уравнения (4.3) следует, что $x \geqslant 0$, так как его левая часть неотрицательна. Поэтому из уравнения (4.4) имеем

$$x = (4-a)/(2\sqrt{2(2-a)}). \tag{4.5}$$

Решение нельзя считать законченным, так как не установлено, при каких значениях a уравнение (4.5) равносильно уравнению (4.3).

Подставляем полученное значение x в уравнение (4.3):

$$\sqrt{x^2 - a} = \sqrt{(4-a)^2 : (16-8a) - a} = |3a-4| : 2\sqrt{2(2-a)};$$

$$2\sqrt{x^2 - 1} = 2\sqrt{(4-a)^2 : (16-8a) - 1} = 2|a| : 2\sqrt{2(2-a)}.$$

Теперь ясно, что уравнение (4.5) равносильно уравнению (4.3) только тогда, когда

$$|3a-4| + 2|a| = 4 - a. \qquad (4.6)$$

Найдем корни уравнения (4.6). Если $a < 0$, то $2|a| = -2a$, $|3a - 4| = 4 - 3a$, и уравнение (4.6) решений не имеет. Если $0 < a < 4/3$, то $|3a-4| = 4 - 3a$, $2|a| = 2a$, и решением уравнения (4.6) является промежуток $[0; 4/3]$. Если $4/3 < a < 2$, то $|3a-4| = 3a - 4$, $2|a| = 2a$, и уравнение (4.6) решений не имеет.

Ответ. $x = (4-a)/(2\sqrt{2(2-a)})$, $0 \leqslant a \leqslant 4/3$.

4.2. Применение теоремы о средних величинах

При доказательстве многих неравенств целесообразно применять неравенство

$$0{,}5(a+b) \geqslant \sqrt{ab} \quad (a, b \geqslant 0). \qquad (4.7)$$

Задача 1. Доказать, что $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc(a+b+c)$, если $a, b, c \geqslant 0$.

Очевидно, что $a^4 + b^4 + c^4 = 0{,}5(a^4 + b^4) + 0{,}5(b^4 + c^4) + 0{,}5(a^4 + c^4)$. На основании неравенства (4.7) получаем:

$$0{,}5(a^4 + b^4) \geqslant a^2b^2;\ 0{,}5(b^4 + c^4) \geqslant b^2c^2;\ 0{,}5(c^4 + a^4) \geqslant c^2a^2.$$

Сложив почленно эти неравенства, имеем

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2. \qquad (4.8)$$

Но $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 0{,}5(a^2b^2 + b^2c^2) + 0{,}5(b^2c^2 + c^2a^2) + 0{,}5(c^2a^2 + a^2b^2)$. На основании неравенства (4.7) получаем: $0{,}5(a^2b^2 + b^2c^2) \geqslant ab^2c$; $0{,}5(b^2c^2 + c^2a^2) \geqslant bc^2a$; $0{,}5(c^2a^2 + a^2b^2) \geqslant ca^2b$. Сложив почленно эти неравенства, имеем

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqslant abc(b + c + a). \qquad (4.9)$$

Из неравенств (4.8) и (4.9) следует утверждение задачи.

Задача 2. Доказать, что $(4a+1)^{0,5} + (4b+1)^{0,5} + (4c+1)^{0,5} \leqslant 5$, если $a + b + c = 1$.

Очевидно, что $\sqrt{4a+1} = \sqrt{(4a+1)\,1}$. Применив формулу (4.7), получим

$$\sqrt{4a+1} = \sqrt{(4a+1)\,1} \leqslant 0{,}5\,((4a+1)+1) = 2a+1. \qquad (4.10)$$

Аналогично

$$\sqrt{4b+1} \leqslant 2b+1;\ \sqrt{4c+1} \leqslant 2c+1. \qquad (4.11)$$

Складывая почленно неравенства (4.10) и (4.11) и учитывая, что $a + b + c = 1$, находим

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \leqslant 2a+2b+2c+3 =$$

$$= 2(a+b+c)+3 = 2\cdot 1+3 = 5.$$

Задача 3. Доказать, что $a^4 - a^2 - 3a + 5 > 0$, если $a \geqslant 0$.

Преобразуем это неравенство к виду $a^4 + 5 > a^2 + 3a$. Применив формулу (4.7), получим $a^4 + 5 \geqslant 2\sqrt{5a^4} = 2a^2\sqrt{5}$. Далее

$$2a^2\sqrt{5} > a^2 + 3a \Leftrightarrow a(2\sqrt{5}-1) > 3 \quad (a \neq 0).$$

Так как $2\sqrt{5} - 1 > 3$, то $a(2\sqrt{5}-1) > 3$ верно при $a \geqslant 1$. Остается показать, что данное неравенство верно и тогда, когда $0 \leqslant a \leqslant 1$. Если $0 \leqslant a \leqslant 1$, то $a^4 + 5 \geqslant 5$, $a^2 + 3a \leqslant 4$.

Задача 4. Доказать, что $4ab(3-a) - 4a(1+b^2) \leqslant b$, если $a, b > 0$.

Преобразуем это неравенство к виду $(4a^2b + b) + (4a + 4ab^2) \geqslant 12ab$. На основании формулы (4.7) имеем:

$$4a^2b + b \geqslant 2\sqrt{4a^2b\cdot b} = 4ab; \quad 4a + 4ab^2 \geqslant 2\sqrt{4a\cdot 4ab^2} = 8ab.$$

Сложив почленно эти неравенства, убеждаемся в справедливости утверждения задачи.

4.3. Доказательство неравенств методом математической индукции

Пусть требуется доказать справедливость неравенства $f(n) > 0$ при $n \geqslant k$ (n, k — натуральные числа). Проверяется справедливость этого неравенства при $n = k$. Допускается справедливость для $n = k_1$ ($k_1 > k$, k_1 — натуральное число). После этого доказывается справедливость неравенства $f(n) > 0$ при $n = k_1 + 1$, причем при доказательстве используется неравенство $f(k_1) > 0$.

Задача 1. Доказать, что при натуральном $n \geqslant 3$ верно неравенство

$$2^n > 2n + 1. \tag{4.12}$$

При $n = 3$ неравенство (4.12) верно. Допустим, что оно верно при $n = k$ ($k > 3$), т.е. верно

$$2^k > 2k + 1. \tag{4.13}$$

Докажем, что неравенство (4.12) верно и при $n = k + 1$, т.е. что

$$2^{k+1} > 2(k+1) + 1 = 2k + 3. \tag{4.14}$$

Неравенство (4.14) доказываем, используя неравенство (4.13):

$$2^{k+1} = 2^k\cdot 2 > (2k+1)2 = 4k + 2 = (2k+3) + (2k-1). \tag{4.15}$$

Так как $k > 3$, то $2k - 1 > 0$, поэтому из неравенства (4.15) имеем $2^{k+1} > 2k + 3$, т.е. доказано неравенство (4.14).

Таким образом, неравенство $2^n > 2n + 1$ справедливо при любом натуральном $n \geqslant 3$.

З а д а ч а 2. Доказать неравенство

$$x^4 - x^2 - 3x + 5 > 0, \; x \geqslant 2. \tag{4.16}$$

Функция $f(x) = x^4 - x^2 - 3x + 5$ непрерывна при всех $x \geqslant 2$. Поэтому, если докажем, что данное неравенство верно для $x = k/n$ ($x \geqslant 2$; k, n – натуральные числа), тем самым будет доказано утверждение задачи для всех действительных значений $x \geqslant 2$.

При $x = k/n$ неравенство (4.16) принимает вид

$$\frac{k^4}{n^4} - \frac{k^2}{n^2} - 3\,\frac{k}{n} + 5 > 0$$

или

$$k^4 - k^2n^2 - 3kn^3 + 5n^4 > 0. \tag{4.17}$$

Убеждаемся, что неравенство (4.17) верно при $x = 2$, т.е. при $k = 2$ и $n = 1$.

Допускаем, что неравенство (4.17) верно при каком-либо $k = p > 2$ (считаем n – параметром, таким, что $p/n > 2$), т.е. допускаем справедливость неравенства

$$p^4 - p^2n^2 - 3pn^3 + 5n^4 > 0. \tag{4.18}$$

Докажем теперь, что верно неравенство

$$(p+1)^4 - (p+1)^2n^2 - 3(p+1)n^3 + 5n^4 > 0. \tag{4.19}$$

Для этого выполним почленно вычитание неравенства (4.18) из (4.19). И если докажем, что полученное неравенство будет верным, тем самым убедимся в справедливости неравенства (4.19).

Итак, будем доказывать, что

$$((p+1)^4 - p^4) - n^2((p+1)^2 - p^2) - 3n^3((p+1) - p) > 0. \tag{4.20}$$

Выполним последовательно тождественное преобразование левой части неравенства (4.20) следующим образом:

$$((p+1)^2 - p^2)((p+1)^2 + p^2) - n^2(2p+1) - 3n^3;$$

$$(2p+1)(2p^2 + 2p + 1) - n^2(2p+1) - 3n^3;$$

$$4p^3 + 6p^2 + 4p + 1 - 2n^2p - n^2 - 3n^3;$$

$$2p^3 + 2p(p^2 - n^2) + 6p^2 + 4p + 1 - n^2 - 3n^3. \tag{4.21}$$

Так как $p \geqslant 2n$ ($x \geqslant 2$), то $2p(p^2 - n^2) \geqslant 6pn^2 \geqslant 12n^3$. Поэтому $2p(p^2 - n^2) - n^2 - 3n^3 \geqslant 12n^3 - n^2 - 3n^3 = 9n^3 - n^2 > 0$, $n \geqslant 1$. Теперь ясно, что выражение (4.21) положительно, если $p \geqslant 2n$. Утверждение задачи доказано.

4.4. Доказательство числовых неравенств

Рассмотрим два способа доказательства числовых неравенств.

З а д а ч а 1. Доказать неравенство $\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$.

Обычно путем неоднократного возведения в степень обеих частей неравенства такого вида сводятся к рациональным. Но в данном случае такой путь сложен. Гораздо проще поступить следующим образом. Нам нужно доказать, что левая часть неравенства меньше правой. Поэтому с помощью таблиц будем находить приближенные значения обеих частей неравенства (левой части — с избытком, правой — с недостатком). Вычисления ведем сначала с точностью до 1, потом до 0,1, и так до тех пор, пока не убедимся в справедливости данного неравенства.

Точность вычисления	$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$	$2\sqrt[3]{3}$
До 1	$2 + 2 = 4$	2
До 01	$1,6 + 1,2 = 2,8$	2,8

Итак, $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2,8$; $2\sqrt[3]{3} > 2,8$. Утверждение задачи доказано.

Данное неравенство можно доказать и следующим образом. Перепишем его в виде

$$\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{3}/3}+\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{3}/3} < 2.$$

Введем в рассмотрение непрерывную функцию

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x}, \ x \in (-1;\ 1),$$

и найдем ее производную:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}.$$

Она равна нулю в точке $x = 0$. Получим $f(0) = 2$, $f(-1) = \sqrt[3]{2}$, $f(1) = \sqrt[3]{2}$. Но $\sqrt[3]{2} < 2$. Поэтому непрерывная функция $f(x)$ возрастает на интервале $(-1;\ 0)$ и убывает на $(0;\ 1)$. Наибольшего значения, равного 2, функция $f(x)$ достигает в точке 0. Так как $f(\sqrt[3]{3}/3) < f(0) = 2$, утверждение задачи доказано.

4.5. Метод полной индукции

Пусть требуется доказать справедливость неравенства $F(x) \geqslant 0$ на $(a;\ b)$. Разобьем данный интервал на несколько промежутков и докажем его справедливость отдельно для каждого из них. При этом каждый раз левая часть неравенства преобразовывается к новому виду.

Задача 1. Доказать, что

$$a^5 - a^2 - 3a + 5 > 0, \ a \geqslant 0. \tag{4.22}$$

Функция $f(a) = a^5 - a^2 - 3a + 5$ определена на $[0;\ +\infty)$. Применение производной для исследования свойств этой функции неэффективно, так как

$f'(a) = 5a^4 - 2a - 3$ является многочленом четвертой степени, корни которого найти трудно. Поэтому поступаем следующим образом.

Сначала преобразуем неравенство (4.22):

$$a^2(a^3 - 1) + (5 - 3a) > 0.$$

Теперь ясно, что оно верно на $[1;\ 5/3]$.

Далее, если $0 \leqslant a \leqslant 1$, то неравенство (4.22) также верно, так как при этих значениях a каждое из выражений a^5, a^2, $3a$ не превосходит единицы и, следовательно, $|a^5 - a^2 - 3a| \leqslant 3$.

Наконец, преобразуем неравенство (4.22):

$$a(a(a^3 - 1) - 3) + 5 > 0.$$

Так как $(5/3)^3 > 3$, то $a^3 - 1 > 2$, если $a > 5/3$. Поэтому $a(a^3 - 1) > 10/3$ и $a(a^3 - 1) - 3 > 0$, если $a > 5/3$. Теперь понятно, что неравенство (4.22) верно и на $(5/3;\ +\infty)$. Таким образом, утверждение задачи доказано полностью.

Чтобы облегчить применение метода полной индукции, во многих случаях целесообразно построить график (хотя бы по точкам) функции, соответствующей исследуемому неравенству. Для упрощения вычислений целесообразно использовать микрокалькулятор.

З а д а ч а 2. Доказать неравенство

$$x^7 + x^2 + 1 \geqslant 3x^3,\ x \geqslant 0.$$

Составляем таблицу приближенных значений монотонных неотрицательных функций $f(x) = x^7 + x^2 + 1$ и $\varphi(x) = 3x^3$, заданных на множестве неотрицательных чисел (табл. 4.1).

Таблица 4.1

x	$f(x)$	$\varphi(x)$
0	1	0
0,5	1,3	0,38
1	3	3
1,5	20	10
2	133	24

Что подсказывают табл. 4.1 и графики функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, приведенные на рис. 4.1? Во-первых, $f(1) = \varphi(1)$. Во-вторых, по-видимому, графики функций f и φ касаются в точке $x = 1$. В-третьих, на промежутках $[0;\ 1)$ и $(1;\ +\infty)$ точки графика функции f расположены выше соответствующих точек графика функции φ. Если функции f и φ этими свойствами обладают, выражение $x^7 + x^2 + 1 - 3x^3$ должно делиться на $(x - 1)^2$. Выполнив известные операции, получим

$$x^7 - 3x^3 + x^2 + 1 = (x - 1)^2(x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x + 1).$$

После этого утверждение задачи очевидно.

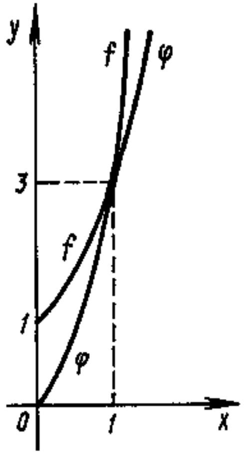


Рис. 4.1

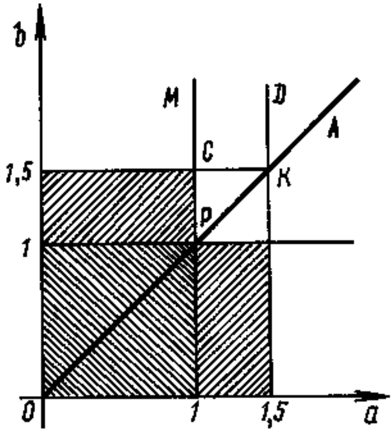


Рис. 4.2

Задача 3. Доказать неравенство

$$2(a^4+b^4)+19>12ab,\ a,b>0.$$

Левая часть данного неравенства не меньше 19, поэтому естественно рассмотреть сначала случай $0<a\leqslant 1$, $0<b\leqslant 1$. Тогда правая часть неравенства не превосходит 12. Итак, если $0<a\leqslant 1$ и $0<b\leqslant 1$, утверждение задачи верно (рис. 4.2).

Так как $19/12>1{,}5$, то очевидно, что неравенство верно и в случае, если $0<ab\leqslant 1{,}5$, например если $0<a\leqslant 1$ и $1\leqslant b\leqslant 1{,}5$ или $1\leqslant a\leqslant 1{,}5$ и $0<b\leqslant 1$ (рис. 4.2).

Так как выражение $2(a^4+b^4)+19-12ab$ не меняется при замене a на b или b на a, в дальнейшем будем исследовать только случай $b>a>0$, т.е. ту часть координатной плоскости (a,b), которая ограничена положительной полуосью b и биссектрисой OA первого координатного угла (рис. 4.2).

Если $0<a<1$ и $b>1{,}5$, то $12ab<12b$ и $a^4+b^4>b^2$. Неравенство $2b^2+19>12b$ верно при всех положительных значениях b, поэтому утверждение задачи для случая $0<a<1$, $b>1{,}5$ доказано.

Осталось исследовать ту часть координатной плоскости (a,b), которая заключена между лучами PM и PA (рис. 4.2). Если $1<a\leqslant 1{,}5$ и $b>1{,}5$, то $12ab<18b$ и $a^4+b^4>1+b^4$. Неравенство $2(1+b^4)+19>18b$ или $2b^4-18b+21>0$ верно при всех действительных значениях b.

В самом деле, $2b^4-18b+21=2b(b^3-9)+21$. Если $b\geqslant\sqrt[3]{9}$, то $b^3-9\geqslant 0$ и $2b(b^3-9)+21>0$. Если $1{,}5<b<\sqrt[3]{9}$, то $2b<2\sqrt[3]{9}<2{,}5$ и $b^3-9>1{,}5^3-9>-6$, т.е. $-6\cdot 2{,}5+21>0$. Если $b>a>1{,}5$, то $a^4+b^4>1{,}5^4+b^4>5+b^4$ и $12ab<12b^2$.

Неравенство $2(5+b^4)+19>12b^2$ верно при всех значениях b (оно приводится к квадратному заменой $b^2=c$).

Итак, осталось исследовать точки плоскости (a,b), заключенные внутри треугольника PCK (рис. 4.2).

Если $a < b < 1{,}5$ и $1 < a < 1{,}5$, то $12ab > 12b^2$, $a^4 + b^4 > 1 + b^4$. Неравенство $2(1 + b^4) + 19 > 12b^2$ справедливо при всех значениях b. Утверждение задачи полностью доказано.

В чем ценность рассмотренного решения? Во-первых, использовались только свойства квадратных неравенств. Во-вторых, показан конкретный путь расчленения сложной задачи на более простые. В-третьих, в процессе решения задачи учащиеся приобретают навыки применения одного из наиболее общих методов решения математических задач, каким является метод полной индукции.

Конечно, применение производной к исследованию функции

$$f(a) = 2(a^4 + b^4) + 19 - 12ab,$$

где b — параметр, на множестве положительных чисел несколько сокращает вычисления.

Находим:

$$f'(a) = 8a^3 - 12b = 4(2a^3 - 3b);\ f'(\sqrt[3]{1{,}5b}) = 0;$$

$$f(\sqrt[3]{1{,}5b}) = 2(\sqrt[3]{(1{,}5b)^4} + b^4) + 19 - 12b\sqrt[3]{1{,}5b} =$$

$$= 2b^4 - 9b\sqrt[3]{1{,}5b} + 19.$$

Теперь докажем, что функция $\varphi(b) = 2b^4 - 9b\sqrt[3]{1{,}5b} + 19$ положительна на множестве положительных чисел.

Вычисляем $\varphi'(b) = 4\sqrt[3]{b}\,(2b^{8/3} - 3\sqrt[3]{1{,}5})$. Так как $b > 0$, то $\varphi'(b) = 0$ только при $b = \sqrt{1{,}5}$. Получаем $\varphi(\sqrt{1{,}5}) = 10$, $\lim\limits_{b \to +\infty} \varphi(b) = +\infty$.

Итак, доказано, что функция $\varphi(b)$ положительна на множестве положительных чисел. Очевидно, что $\lim\limits_{a \to +\infty} f(a) = +\infty$. Утверждение задачи доказано.

Однако самое простое решение задачи обеспечивает применение теоремы о средних величинах. В самом деле, $a^4 + b^4 \geqslant 2\sqrt{a^4b^4} = 2a^2b^2$. Обозначив $ab = x$, данное неравенство заменим неравенством $4x^2 - 12x + 19 > 0$. Утверждение задачи стало очевидным.

4.6. Решение неравенств методом интервалов

Дано неравенство $F(x) > 0$. Требуется определить все его решения на $[a;\ b]$. Пусть функция $y = F(x)$ непрерывна на $[a;\ x_1)$, $(x_1;\ x_2)$,..., $(x_n;\ b]$. Находим нули функции $y = F(x)$. Полагаем для определенности, что $F(c) = F(d) = 0$ и $c \in (x_1;\ x_2)$; $d \in (x_n;\ b]$. Итак, $F(x) \neq 0$ на $[a;\ x_1)$, $(x_1;\ c)$, $(c;\ x_2)$,..., $(x_n;\ d)$, $(d;\ b]$. Из этих промежутков берем по одному произвольному числу: $m_1 \in [a;\ x_1)$, $m_2 \in (x_1;\ c)$, $m_3 \in (c;\ x_2)$ и т.д. Вычисляем $F(m_1)$, $F(m_2)$, $F(m_3)$ и т.д. Пусть, например, $F(m_2) > 0$, $F(m_3) > 0$. Тогда в силу непрерывности функции $y = F(x)$ на $(x_1;\ c)$ и $(c;\ x_2)$ решениями неравенства $F(x) > 0$ будут все точки интервалов $(x_1;\ c)$, $(c;\ x_2)$.

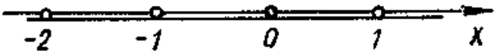


Рис. 4.3

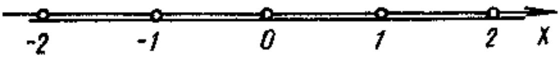


Рис. 4.4

З а д а ч а 1. Решить неравенство

$$\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-2}>1,\ x\geqslant 2. \qquad (4.23)$$

Это неравенство определено на $[2;+\infty)$. Решим уравнение

$$\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-2}=1,\ x\geqslant 2, \qquad (4.24)$$

следующим образом:

$$(\sqrt[3]{x-2})^3=(\sqrt{x-1}-1)^3;\ \sqrt{x-1}\,(x+2-4\sqrt{x-1})=0.$$

Отсюда $\sqrt{x-1}=0$ или $x+2-4\sqrt{x-1}=0$. Находим корни этих уравнений: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=10$. Очевидно, что только числа 2 и 10 являются корнями уравнения (4.24).

Исследуем неравенство (4.23) на интервалах $(2;10)$, $(10;+\infty)$. Обозначим $f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-2}$, $x\geqslant 2$. Число $3\in(2;10)$ и $f(3)<$ $<1{,}29\in(10;+\infty)$ и $f(29)>1$.

Ответ. $(10;+\infty)$.

З а д а ч а 2. Решить неравенство

$$\log_{x^2}(2+x)<1. \qquad (4.25)$$

Так как логарифм определен только для положительных чисел и основание логарифма не может быть равно нулю или единице, данное неравенство определено на множестве $(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$ (рис. 4.3).

Решаем уравнение $\log_{x^2}(2+x)=1$:

$$2+x=x^2;\ x^2-x-2=0;\ x_1=-1;\ x_2=2.$$

Функция $f(x)=\log_{x^2}(2+x)-1$ непрерывна на интервалах $(-2;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$ (рис. 4.4).

С помощью микрокалькулятора находим: $f(-1{,}5)<0$, $f(-0{,}5)<0$, $f(0{,}5)<$ <0, $f(1{,}5)>0$, $f(3)<0$.

Ответ. $(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(2;+\infty)$.

4.7. Метод подстановки

Рассмотрим один из способов доказательства неравенств с переменными, основанный на следующем положении: неравенство с переменными считается доказанным, если установлена его справедливость для всех равных и всех не равных между собой значений этих переменных на заданном множестве.

Доказательство неравенств проводится в два этапа: 1) проверяется выполнимость неравенства для всех равных между собой значений переменных; 2) доказывается неравенство для всех не равных между собой значений переменных с помощью подстановки (например, вместо переменных a и b используются переменные b и $h>0$, где $a=b+h$ для всех $a>b$).

Если в неравенстве позиции переменных взаимозаменяемы, на втором этапе достаточно рассмотреть один из случаев неравенства значений переменных между собой.

Сущность метода подстановки доказательства неравенств поясним примерами.

Задача 1. Доказать неравенство

$$3a^3+7b^3>9ab^2,\ a>0;\ b>0. \tag{4.26}$$

Если $a=b$, то $10a^3>9a^3$. Пусть $a>b$ и $a=b+h$, где $h>0$. Тогда

$$3a^3+7b^3=3(b+h)^3+7b^3=10b^3+9b^2h+9bh^2+3h^3;$$

$$9ab^2=9(b+h)b^2=9b^3+9b^2h.$$

Для этого случая утверждение задачи стало очевидным.

Пусть $a<b$ и $b=a+p$, где $p>0$. Тогда

$$3a^3+7b^3=3a^3+7(a+p)^3=10a^3+21a^2p+21ap^2+7p^3;$$

$$9ab^2=9a(a+p)^2=9a^3+18a^2p+9ap^2.$$

И для этого случая утверждение задачи доказано.

Для сравнения приведем еще два решения рассматриваемой задачи.

1. Разделив обе части данного неравенства на a^3 и обозначив $b/a=x>0$, получим $3+7x^3>9x^2$.

Исследуем функцию $f(x)=7x^3-9x^2+3$, определенную на множестве неотрицательных чисел, на экстремум: $f'(x)=21x^2-18x$. Производная равна нулю в точке $x_0=6/7$. Легко проверить, что функция f в точке x_0 положительна; $f(0)=3$, $f(1)=1$. Поэтому в точке x_0 функция $f(x)$ достигает наименьшего значения. Утверждение задачи доказано.

2. Если $a>0$ и $b>0$, то $3a^3+7b^3>3a^3+6b^3$. Докажем, что $3a^3+6b^3>$ $>9ab^2$, т.е. что $a^3-3ab^2+2b^3>0$. Замечаем, что если $a=b$, то левая часть последнего неравенства равна нулю. Поэтому $a^3-3ab^2+2b^3=(a-b)(a^2+$ $+ab-2b^2)=(a-b)^2(a+2b)$. Утверждение задачи стало очевидным.

Задача 2. Доказать неравенство $3a^3+b^3\geqslant 1/16$, если $3a+b=1$ и $a>$ >0, $b>0$.

Во-первых, для всех $a=b$ имеем $3a+b=4a=1$, $a=0{,}25$. Тогда $3a^3+b^3=$ $=4a^3=4\cdot 0{,}25^3=1/16$.

Во-вторых, пусть $a<b$, $b=a+h$, $h>0$. Тогда $3a+b=4a+h=1$. Отсюда $a=0{,}25(1-h)$. Получаем

$$3a^3+b^3=3\left(\frac{1-h}{4}\right)^3+\left(\frac{1-h}{4}+h\right)^3=$$

$$= \frac{4 + 36h^2 + 24h^3}{64} > \frac{4}{64} = 1/16.$$

В-третьих, пусть $a > b$, $a = b + p$, $p > 0$. Тогда $3(b+p) + b = 1$. Отсюда $b = 0{,}25(1 - 3p)$, причем $0 < p < 1/3$. Тогда

$$3a^3 + b^3 = 3\left(\frac{1-3p}{4} + p\right)^3 + \left(\frac{1-3p}{4}\right)^3 =$$

$$= \frac{4 + 36p^2 - 24p^3}{64} > \frac{4}{64} = \frac{1}{16},\ 0 < p < \frac{1}{3}.$$

Неравенство доказано.

Приведем еще одно решение этой задачи. Так как $3a + b = 1$, то $b = 1 - 3a > 0$, и левая часть исследуемого неравенства принимает вид $f(a) = 3a^3 + (1 - 3a)^3$, $0 < a < 1/3$. Исследуем функцию $f(a)$:

$$f'(a) = 9a^2 - 9(1 - 3a)^2 = 9(-2a + 1)(4a - 1).$$

Так как непрерывная функция $f(a)$ определена на интервале $(0;\ 1/3)$, то $f'(a) = 0$ только в точке $a = 0{,}25$. Находим: $f(0{,}25) = 1/16$, $\lim\limits_{a \to 0} f(a) = 1$, $\lim\limits_{a \to 1/3} f(a) = 1/9$. Утверждение задачи доказано.

4.8. Приближенные методы решения уравнений

Существует несколько методов приближенного решения уравнений: итераций, хорд, касательных. Однако наиболее доступным для понимания является метод проб. Его применение основано на простейших свойствах непрерывных функций. Покажем, как с помощью таблиц функций и их графиков методом проб можно достаточно быстро найти не только приближенные, но во многих случаях и точные значения корней сложных уравнений.

З а д а ч а 1. Найти действительные корни уравнения

$$f(x) = x^4 + 4x - 1 = 0.$$

Преобразуем это уравнение к виду $x^4 = 1 - 4x$. Построим графики $y_1 = 1 - 4x$, $y_2 = x^4$. Данное уравнение имеет два действительных корня x_1 и x_2, причем $-2 < x_1 < -1$ и $0 < x_2 < 0{,}25$. Уточним значения этих корней методом проб:

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
−2	> 0	−1,7	> 0	−1,67	> 0	0,25	> 0
−1	< 0	−1,6	< 0	−1,663	< 0	0,24	< 0
−1,4	< 0	−1,65	< 0	−1,664	> 0	0,2495	> 0
−1,5	< 0	−1,68	> 0	−1,6635	$x_1 \approx -1{,}6635$	0,2493	> 0
−1,8	> 0	−1,66	< 0	0	< 0	0,2491	> 0
						0,2490	< 0

Итак, $x_1 \approx -1{,}6636$, $x_2 \approx 0{,}24905$.

Вычисляем: $x_1 + x_2 \approx -1{,}4145$, $x_1 x_2 \approx -0{,}41429$. Теперь нетрудно заметить, что 1,4145 есть приближенное значение $\sqrt{2}$, а $-0{,}41429 \approx 1 - \sqrt{2}$. Приходим к гипотезе:

$$x_1 + x_2 = -\sqrt{2};\ x_1 x_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

Решив систему этих уравнений, найдем:

$$x_1 = 0{,}5\left(-\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2}\right);\quad x_2 = 0{,}5\left(-\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}\right).$$

В результате проверки убеждаемся, что найденные числа действительно являются корнями исходного уравнения.

4.9. Выражение неизвестного через неизвестное

Сущность метода поясним примерами.

З а д а ч а 1. Доказать, что если

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha + \beta) = 1{,}5 \tag{4.27}$$

и α, β — углы треугольника, т.е. $0 < \alpha + \beta < 180°$, то $\alpha = \beta = 60°$.

Преобразуем равенство (4.27) следующим образом:

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 1 - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = 1{,}5;$$

$$4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 1 = 0. \tag{4.28}$$

Равенство (4.28) является квадратным уравнением относительно $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, поэтому

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0{,}5\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \pm \sqrt{-\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}}\right). \tag{4.29}$$

Так как $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ является действительным числом, то $-\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$, т.е. $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$ и $\alpha - \beta = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Но так как $\alpha > 0°$, $\beta < 180°$, то k может быть равно только нулю. Отсюда

$$\alpha - \beta = 0;\ \alpha = \beta. \tag{4.30}$$

Из равенств (4.29) и (4.30) следует, что $\cos\alpha = 0{,}5$ и $\alpha = \beta = 60°$.

З а д а ч а 2. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} &= 3; \\ y - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.31}$$

Обозначим $x^2 + y^2 = a^2$. Система уравнений (4.31) примет вид

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{3x - y}{a^2} = 3; \\ y - \frac{x + 3y}{2} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Решив эту систему относительно x и y, получим:

$$x = \frac{3a^2\,(a^2 - 3)}{a^4 - 10}\ ;\ y = \frac{3a^2}{a^4 - 10}\ . \tag{4.32}$$

Находим

$$x^2 + y^2 = \frac{9a^4\,(a^4 - 6a^2 + 10)}{(a^4 - 10)^2}\ .$$

Но $x^2 + y^2 = a^2$, поэтому

$$\frac{9a^4\,(a^4 - 6a^2 + 10)}{(a^4 - 10)^2} = a^2.$$

После упрощений уравнение примет вид

$$(a^2 - 5)\,(a^2 - 2)\,(a^4 - 2a^2 + 10) = 0. \tag{4.33}$$

Решив уравнение (4.33), найдем:

$$a^5 = 5;\ a^2 = 2. \tag{4.34}$$

Из равенств (4.32) и (4.34) получаем: $x_1 = 2, y_1 = 1, x_2 = 1, y_2 = -1.$

4.10. Тригонометрические подстановки

Тригонометрические подстановки целесообразно применять в тех случаях, когда сложное рациональное или иррациональное уравнение сводится к достаточно простым тригонометрическим уравнениям.

З а д а ч а 1. Решить систему уравнений:

$$3\,(x + 1/x) = 4\,(y + 1/y) = 5\,(z + 1/z)\,; \tag{4.35}$$

$$xy + yz + zx = 1. \tag{4.36}$$

Из равенств (4.35) ясно, что x, y, z имеют одинаковые знаки, причем если (x, y, z) — решение данной системы уравнений, то и $(-x, -y, -z)$ является ее решением.

Формула $\sin 2\varphi = \dfrac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}$ подсказывает, что нужно ввести углы α, β, γ из промежутка $(0;\ \pi)$, такие, что $\operatorname{tg}(\alpha/2) = x$, $\operatorname{tg}(\beta/2) = y$, $\operatorname{tg}(\gamma/2) = z$. После этого условие (4.35) принимает вид

$$\frac{\sin\alpha}{3}=\frac{\sin\beta}{4}=\frac{\sin\gamma}{5}. \tag{4.37}$$

Из уравнения (4.36) получаем $\frac{1}{z}=\frac{x+y}{1-xy}$, $xy\neq 1$, $z\neq 0$, или $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=$ $=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$, или

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}. \tag{4.38}$$

Из равенства (4.38) получаем $0,5(\pi-\gamma)=0,5(\alpha+\beta)$, т.е. $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Как следует из условия (4.37), α, β и γ являются углами треугольника, длины сторон которого относятся как 3:4:5. Но треугольник с таким отношением сторон является прямоугольным ($\gamma=90°$, $\sin\alpha=0{,}6$, $\sin\beta=0{,}8$). Отсюда $\operatorname{tg}(\alpha/2)=1/3$; $\operatorname{tg}(\beta/2)=1/2$; $\operatorname{tg}(\gamma/2)=1$.

Ответ. $(1/3, 1/2, 1)$; $(-1/3, -1/2, -1)$.

4.11. Векторное доказательство неравенств

Векторное доказательство неравенств основывается на применении очевидного неравенства

$$|\bar{a}\cdot\bar{b}|\leqslant|\bar{a}|\,|\bar{b}|, \tag{4.39}$$

или в координатной форме (соответственно для двухмерного и трехмерного пространств):

$$\bar{a}\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2}; \tag{4.40}$$

$$\bar{a}\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}, \tag{4.41}$$

где $\bar{a}=(x_1;\ y_1)$; $\bar{b}=(x_2;\ y_2)$ или $\bar{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$; $\bar{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Задача 1. Доказать, что

$$-2\leqslant\sqrt{3}\sin x-\cos x\leqslant 2. \tag{4.42}$$

Пусть $\bar{a}=(\sqrt{3};\ -1)$ и $\bar{b}=(\sin x;\ \cos x)$. Тогда $\bar{a}\bar{b}=\sqrt{3}\sin x-\cos x$, $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=1$. Поэтому

$$|\sqrt{3}\sin x-\cos x|\leqslant\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}\,\sqrt{\sin^2x+\cos^2x}\leqslant 2.$$

Задача 2. Доказать, что если $a+b+c=1$, то

$$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}\leqslant 15.$$

Пусть $\bar{u}=(\sqrt{2a+1};\ \sqrt{2b+1};\ \sqrt{2c+1})$, $\bar{v}=(1;\ 1;\ 1)$. Тогда

$$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{(\sqrt{2a+1})^2+(\sqrt{2b+1})^2+(\sqrt{2c+1})^2}\,\sqrt{1^2+1^2+1^2}=$$

$$=\sqrt{2(a+b+c)+3}\sqrt{3}=\sqrt{15}.$$

Задача 3. Доказать, что

$$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant 1{,}5, \tag{4.43}$$

если A, B, C — углы треугольника ABC.

Пусть $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — единичные векторы. Тогда $\bar{a}\bar{b}=-\cos B$, $\bar{a}\bar{c}=-\cos A$, $\bar{b}\bar{c}=-\cos C$. Но

$$(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})^2\geqslant 0. \tag{4.44}$$

Раскрыв скобки в левой части неравенства (4.44), получим $\bar{a}^2+\bar{b}^2+\bar{c}^2+2\bar{a}\bar{b}+2\bar{b}\bar{c}+2\bar{a}\bar{c}\geqslant 0$, или $3+2(\bar{a}\bar{b}+\bar{b}\bar{c}+\bar{a}\bar{c})\geqslant 0$, или $3+2(-\cos C-\cos A-\cos B)\geqslant 0$. Отсюда следует неравенство (4.43).

Задача 4. Доказать, что

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+ac+bc, \tag{4.45}$$

если a, b, c — действительные числа.

Пусть $\bar{u}=(a;\ c;\ b)$; $\bar{v}=(b;\ a;\ c)$. Тогда по формуле (4.41)

$$\bar{u}\bar{v}=ab+ac+bc\leqslant\sqrt{a^2+c^2+b^2}\ \sqrt{b^2+a^2+c^2}=a^2+b^2+c^2.$$

Задача 5. Доказать, что

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\leqslant a+b+c,\quad a,b,c\geqslant 0. \tag{4.46}$$

Пусть $\bar{u}=(\sqrt{a};\sqrt{b};\sqrt{c})$; $\bar{v}=(\sqrt{b};\sqrt{c};\sqrt{a})$. Тогда по формуле (4.41) имеем $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\leqslant a+b+c$.

Задача 6. Доказать, что

$$\sqrt{6a+1}+\sqrt{1-6a}\leqslant 2. \tag{4.47}$$

Введем в рассмотрение векторы $\bar{x}=(1:1)$, $\bar{y}=(\sqrt{6a+1};\sqrt{1-6a})$. Из формулы (4.40) следует, что

$$\sqrt{6a+1}+\sqrt{1-6a}\leqslant\sqrt{2}\sqrt{(6a+1)+(1-6a)}=2.$$

Задача 7. Доказать, что

$$a+b+c\geqslant\sqrt[4]{a^2bc}+\sqrt[4]{ab^2c}+\sqrt[4]{abc^2},\ a,b,c>0. \tag{4.48}$$

Введем в рассмотрение векторы $\bar{x}=(\sqrt{a};\sqrt{b};\sqrt{c})$, $\bar{y}=(\sqrt[4]{bc};\sqrt[4]{ac};\sqrt[4]{ab})$. По формуле (4.41) получаем

$$\sqrt[4]{a^2bc}+\sqrt[4]{ab^2c}+\sqrt[4]{abc^2}\leqslant\sqrt{a+b+c}\ \sqrt{\sqrt{ba}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}}. \tag{4.49}$$

Пусть $\bar{u}=(\sqrt{b};\sqrt{c};\sqrt{a})$, $\bar{v}=(\sqrt{c};\sqrt{a};\sqrt{b})$. Применим формулу (4.41) к правой части неравенства (4.49):

$$\sqrt{ba}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab} \leqslant \sqrt{(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2+(\sqrt{a})^2}\ \times$$

$$\times\sqrt{(\sqrt{c})^2+(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2}=a+b+c\,.$$

Утверждение задачи доказано.

4.12. Комплексное использование различных методов решения уравнений и неравенств

В большинстве случаев целесообразно использовать при решении уравнений и неравенств комплексный метод, который может быть реализован по следующему плану:

а) установление множества, на котором определено данное уравнение (неравенство). Всестороннее изучение соответствующих функций и использование при этом их графиков позволяет избежать грубых ошибок и упрощает вычисления;

б) нахождение корней уравнения методом неравносильных преобразований. Посторонние корни обнаруживаются непосредственной проверкой;

в) нахождение промежутков знакопостоянства соответствующих непрерывных функций методом интервалов.

З а д а ч а 1. Решить неравенство

$$\log_{x/6}(\log_x\sqrt{6-x})>0. \tag{4.50}$$

Найдем множество, на котором определено неравенство (4.50):

$$\left[\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}0<x<1;\\ \log_x\sqrt{6-x}>0;\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{l}6-x>0;\\ \log_x\sqrt{6-x}>0;\\ x>1\end{array}\right\}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}0<x<1;\\ \sqrt{6-x}<1;\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{l}1<x<6;\\ \sqrt{6-x}>1\end{array}\right\}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1<x<6;\\ x<5\end{array}\right\} \Leftrightarrow 1<x<5.$$

Итак, неравенство (4.50) определено на $(1;\ 5)$.

Методом неравносильных преобразований находим корни уравнения

$$\log_{x/6}(\log_x\sqrt{6-x})=0; \tag{4.51}$$

$$\log_x\sqrt{6-x}=1;\ \sqrt{6-x}=x;\ 6-x=x^2;\ x_1=2;\ x_2=-3.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что число 2 есть корень уравнения (4.51).

Методом интервалов устанавливаем знаки функции $f(x)=$ $=\log_{x/6}(\log_x\sqrt{6-x})$ на $(1;\ 2)$ и $(2;\ 5)$:

а) число $1{,}5\in(1;\ 2)$ и $f(1{,}5)=\log_{1/4}(\log_{1{,}5}\sqrt{4{,}5})$. Так как $\log_{1{,}5}\sqrt{4{,}5}>$ >1, то $f(1{,}5)<0$;

б) число $3\in(2;\ 5)$ и $f(3)=\log_{0{,}5}(\log_3\sqrt{3})=\log_{0{,}5}(1/2)=1>0$.

Ответ. $(2;\ 5)$.

З а д а ч а 2. Решить относительно x неравенство

$$\sqrt{x^2-a^2}>x-\sqrt{2ax-a^2}\ . \tag{4.52}$$

Для нахождения множества, на котором определено неравенство (4.52), решаем систему неравенств

$$\left.\begin{array}{l}2ax-a^2\geqslant 0;\\ x^2-a^2\geqslant 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}a=0;\\ -\infty<x<+\infty;\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{l}a>0;\\ x\geqslant 0{,}5a;\\ x\geqslant a \text{ или } x\leqslant -a;\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{l}a<0;\\ x\leqslant 0{,}5a;\\ x\leqslant +a \text{ или } x\geqslant -a\end{array}\right\}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}a=0;\\ -\infty<x<+\infty;\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{l}a>0;\\ x\geqslant a;\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{l}a<0;\\ x\leqslant a.\end{array}\right\}\end{array}\right.$$

Методом неравносильных преобразований находим корни уравнения:

$$\sqrt{x^2-a^2}=x-\sqrt{2ax-a^2}\,; \tag{4.53}$$

$$x^2-a^4=x^2-2x\sqrt{2ax-a^2}+(2ax-a^2)\,;\ 2x\sqrt{2ax-a^2}=2ax. \tag{4.54}$$

Число 0 не является корнем уравнения (4.53), если $a\neq 0$. Поэтому при делении левой и правой частей уравнения (4.54) на x мы не теряем корней уравнения (4.53). Получаем:

$$\sqrt{2\,ax-a^2}=a;\ 2ax-a^2=a^2;\ ax=a^2.$$

Если $a\neq 0$, то $x=a$. При $x=a$ уравнение (4.53) принимает вид $0=a-|a|$. Отсюда ясно, что, если $a>0$, уравнение (4.53) имеет корень, равный a. Если $a<0$, уравнение (4.53) решений не имеет. Если $a=0$, решением уравнения (4.53) являются все неотрицательные числа.

Применив метод интервалов, найдем:

если $a=0$, решение неравенства (4.52) есть $(-\infty;\ 0)$;

если $a>0$, то при $x=2a$ $(2a\in[a;\ +\infty))$ неравенство (4.52) обращается в верное тождество. Поэтому, если $a>0$, решение неравенства (4.52) есть $[a;\ +\infty)$;

если $a<0$, то при $x=a$ $(a\in(-\infty;\ a])$ неравенство (4.52) обращается в верное тождество. Поэтому, если $a<0$, решением неравенства (4.52) является $(-\infty;\ a]$.

З а д а ч а 3. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x-9}=(x-3)^3+6. \tag{4.55}$$

Стандартные приемы решения этого уравнения приводят к громоздким преобразованиям выражений с переменными и малоэффективны. В таких случаях нужно сначала сформулировать гипотезу о числе решений уравнения. Для этого составим (с помощью микрокалькулятора) табл. 4.2 графиков непрерывных функций $f(x)=\sqrt[3]{x-9}$ и $\varphi(x)=(x-3)^3+6$.

Таблица 4.2

x	$f(x)$	$\varphi(x)$	x	$f(x)$	$\varphi(x)$
0	–2,1	–21	6,5	–1,4	49
0,5	–2,0	– 9,6	7	–1,3	70
1	–2,0	– 2,0	7,5	–1,1	97
1,5	–2,0	2,6	8	–1,0	130
2	–1,9	5,0	8,5	–0,80	170
2,5	–1,9	5,9	9	0	220
3	–1,8	6,0	9,5	0,80	280
3,5	–1,8	6,1	10	1,0	350
4	–1,7	7,0	10,5	1,1	430
4,5	–1,7	9,4	11	1,3	520
5	–1,6	14	11,5	1,4	620
5,5	–1,5	22	12	1,4	740
6	–1,4	33			

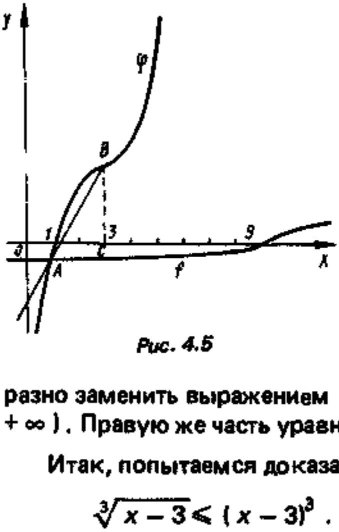


Рис. 4.5

Построим графики функций f и φ (рис. 4.5).

Что дает внимательное изучение таблиц и графиков функций f и φ? Во-первых, становится ясным, что решением данного уравнения является 1. Во-вторых, на [1,5; 9] функция f неположительная, а функция φ положительная, следовательно, на этом промежутке уравнение (4.55) решений не имеет. В-третьих, на (9; +∞) функции f и φ положительные. Графики этих функций подсказывают, что на (9; +∞) выражение $\sqrt[3]{x-9}$ целесообразно заменить выражением $\sqrt[3]{x-3}$. Очевидно, что $\sqrt[3]{x-3} > \sqrt[3]{x-9}$ на (9; +∞). Правую же часть уравнения (4.55) уменьшим, вычтя из него 6.

Итак, попытаемся доказать, что на (9; +∞) верно неравенство

$$\sqrt[3]{x-3} \leqslant (x-3)^3 . \tag{4.56}$$

После возведения обеих частей неравенства (4.56) в 3-ю степень получаем

$$(x-3)((x-3)^8-1) \geqslant 0. \tag{4.57}$$

На (9; +∞) неравенство (4.57) верно. Значит, на этом промежутке верно неравенство (4.56), следовательно, $\varphi(x) > f(x)$.

Таким образом, на [1,5; +∞) уравнение (4.55) решений не имеет.

На (1; 3] функция f вогнутая, а функция φ выпуклая. Поэтому на этом промежутке график функции f лежит под хордой AC, а график функции φ – над хордой AB (рис. 4.5). Значит, и на (1; 3] уравнение (4.55) решений не имеет.

На (–∞; 1) график функции f находится над прямой AC, а график функции φ – под прямой AB. Поэтому и на (–∞; 1) уравнение (4.55) решений не имеет.

Таким образом, только 1 является решением уравнения (4.55).

5. МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

5.1. Сущность методики

Задачи типа решить уравнение $f(x) = 0$; решить неравенство $f(x) \geqslant 0$; доказать тождество $f(x) = a$ (a — параметр); доказать неравенство $f(x) \geqslant a$, если $x \geqslant b$ (a, b — параметры) являются составными частями более общей задачи на исследование функции $f(x)$ и построение ее графика. Поэтому целесообразно рассматривать решения уравнений и неравенств, доказательство тождеств и неравенств в комплексе, полностью используя все известные свойства соответствующих функций.

Общая схема исследования свойств функций: исследование функции на четность (нечетность) и периодичность; исследование функции на монотонность и экстремумы (с применением или без применения производной); нахождение нулей функции.

З а д а ч а 1. Решить уравнение

$$4x^2 + (a-2)x + (a-5) = 0 \tag{5.1}$$

и исследовать, при каких значениях параметра a оно имеет: положительные корни; отрицательные корни; один положительный и один отрицательный корень; равные корни; не имеет действительных корней.

Получить ответы на вопросы можно следующими способами: 1) решить уравнение (5.1) относительно a и исследовать функцию $a = \varphi(x)$. В этом случае исследование корней можно выполнить, не решая уравнения (5.1); 2) исследовать функции $y = 4x^2 + (a-2)x$ и $y = 5 - a$; 3) сначала решить уравнение (5.1) относительно x, потом заняться исследованием функции $x = f(a)$; 4) исследовать функцию $y(x) = 4x^2 + (a-2)x + (a-5)$.

Наибольший интерес представляет первый способ. Решаем уравнение (5.1) относительно a:

$$a = (-4x^2 + 2x + 5)/(x+1), \quad x \neq -1. \tag{5.2}$$

Исследуем функцию (5.2), определенную на $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Чтобы найти критические точки этой функции, преобразуем уравнение (5.2) к виду $a = a(x) = -4x + 6 - (x+1)^{-1}$. Получаем: $a'(x) = -4 + (x+1)^{-2}$, $a'(-0{,}5) = a'(-1{,}5) = 0$, $a(-0{,}5) = 6$, $a(-1{,}5) = 14$, $a(0) = 5$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x = -1\,(x > -1)} a(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1\,(x < -1)} a(x) = +\infty$.

Строим график функции $a(x)$ (рис. 5.1). Из рисунка следует: 1) $a = 14$, $x_1 = x_2 = -1{,}5$; 2) $a > 14$, $x_1, x_2 < 0$; 3) $6 < a < 14$, уравнение (5.1) корней не имеет; 4) $a = 6$, $x_1 = x_2 = -0{,}5$; 5) $5 < a < 6$, $x_1, x_2 < 0$; 6) $a = 5$, $x_2 = 0$, $x_1 < 0$; 7) $a < 5$, $x_1 < 0, x_2 > 0$.

Из графика видно, что ни при каких значениях a корень уравнения (5.1)

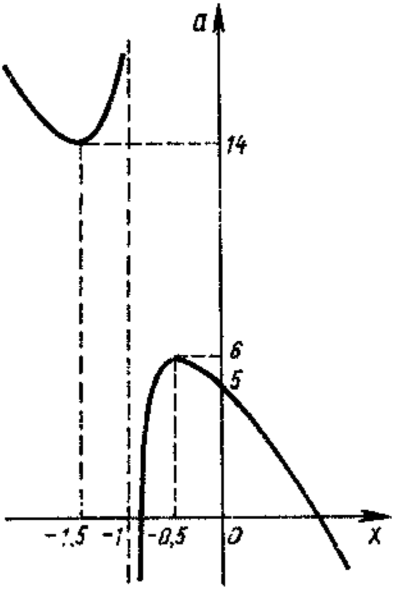


Рис. 5.1

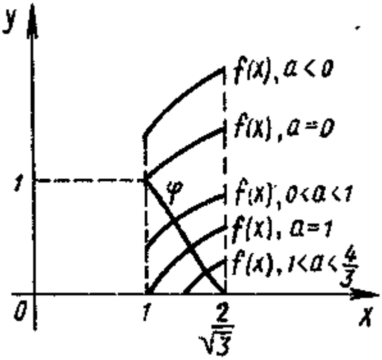


Рис. 5.2

не равен −1. По графику можно проследить, как изменяются корни уравнения (5.1) с изменением параметра a.

З а д а ч а 2. Доказать, что

$$\frac{a+b+c+d+e}{5} \geqslant \sqrt[5]{abcde}, a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant e \geqslant 0.$$

Исследуем функцию $f(a) = \dfrac{a+b+c+d+e}{5} - \sqrt[5]{abcde}$, определенную на $(0; +\infty)$, считая b, c, d, e параметрами:

$$f'(a) = \frac{1}{5}\left(1 - \sqrt[5]{\frac{bcde}{a^4}}\right).$$

Так как $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant e$, то $bcde/a^4 \leqslant 1$ и $f'(a) \geqslant 0$ на $(0; +\infty)$. Ясно, что $f'(a) = 0$, если $a = b = c = d = e$. При всех других значениях параметров b, c, d, e $f'(a) > 0$ на $(0; +\infty)$, т.е. непрерывная функция $f(a)$ является монотонно возрастающей на $(0; +\infty)$, $f(0) = 0$. Следовательно, $f(a) > 0$ на $(0; +\infty)$.

З а д а ч а 3. Доказать тождество

$$2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0.$$

Исследуем функцию $y(x) = 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1$, определенную на $(-\infty; +\infty)$:

$$y'(x) = 12\sin x\cos x\,((\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) - (\sin^2 x - \cos^2 x)) = 0.$$

Итак, $y'(x) = 0$ на всем множестве ее определения и $y(0) = 0$. Поэтому $y(x) = 0$ на $(-\infty; +\infty)$.

Задача 4. Решить относительно x уравнение

$$\sqrt{(x^2 - a)} + \sqrt{2(x^2 - 1)} = x. \qquad (5.3)$$

Преобразуем выражение (5.3):

$$\sqrt{x^2 - a} = x - 2\sqrt{x^2 - 1}. \qquad (5.4)$$

Функция $f(x) = \sqrt{x^2 - a} \geqslant 0$ определена, если $x^2 \geqslant a$. Функция $\varphi(x) = x - 2\sqrt{x^2 - 1} \geqslant 0$. Очевидно, что $\varphi(x)$ определена на множестве значений x, которые являются решением системы

$$\left.\begin{aligned} &x^2 - 1 \geqslant 0; \\ &x - 2\sqrt{x^2 - 1} \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant x \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} .$$

Исследуем функцию $\varphi(x)$ на монотонность: $\varphi'(x) = 1 - 2x/\sqrt{x^2 - 1}$. Уравнение $1 - 2x/\sqrt{x^2 - 1} = 0$ действительных корней не имеет, поэтому функция $\varphi(x)$ монотонная.

Находим $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2/\sqrt{3}) = 0$. Итак, $\varphi(x)$ – убывающая функция на $[1; 2/\sqrt{3}]$ (рис. 5.2).

Строим график возрастающей функции $f(x)$ при различных значениях параметра a (рис. 5.2). Теперь ясно, что уравнение (5.3) имеет решение x_0, и притом только одно, если $0 \leqslant a \leqslant 4/3$.

После двукратного возведения во вторую степень обеих частей уравнения (5.4) и преобразований получаем $x^2 = (4 - a)^2 : 8(2 - a)$. Так как $0 \leqslant a \leqslant 4/3$ и $x > 0$, то $x_0 = (4 - a) : 2\sqrt{2(2 - a)}$.

5.2. Рациональные уравнения и неравенства

При решении рациональных уравнений и неравенств широко используются графики соответствующих рациональных функций.

Задача 1. Решить неравенство $2|x + 1| > x + 4$.

Строим графики функций $f(x) = 2|x + 1|$ и $\varphi(x) = x + 4$ (рис. 5.3). Аккуратно выполненный чертеж позволяет найти точное значение координат точек A и B, т.е. точек, в которых пересекаются графики этих функций. После этого остается только записать ответ: решением данного неравенства являются все точки промежутков $(-\infty; -2)$ и $(2; +\infty)$.

Графики функций f и φ избавляют от необходимости решать две системы уравнений. Но главное достоинство такого решения состоит в том, что учащиеся приобретают навыки использования свойств соответствующих функций и их графиков при решении математических задач. Умение строить графики функций становится не самоцелью, а эффективным средством решения уравнений и неравенств.

Задача 2. Назвать множество решений неравенства

$$|5 - x| < |x - 2| + |7 - 2x|. \qquad (5.5)$$

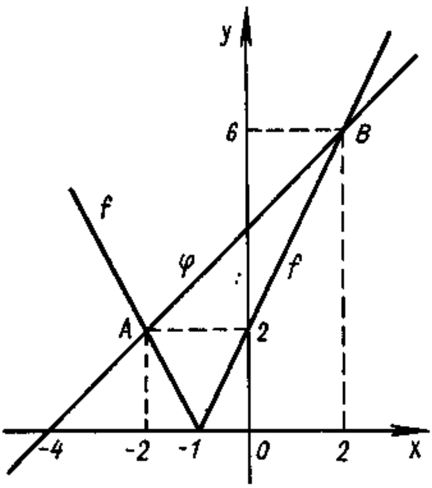


Рис. 5.3

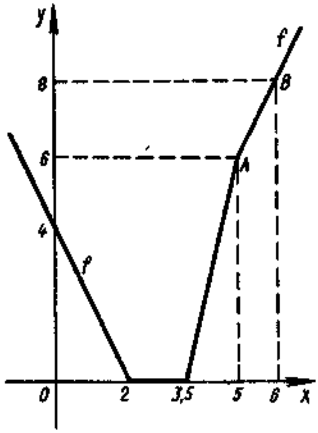


Рис. 5.4

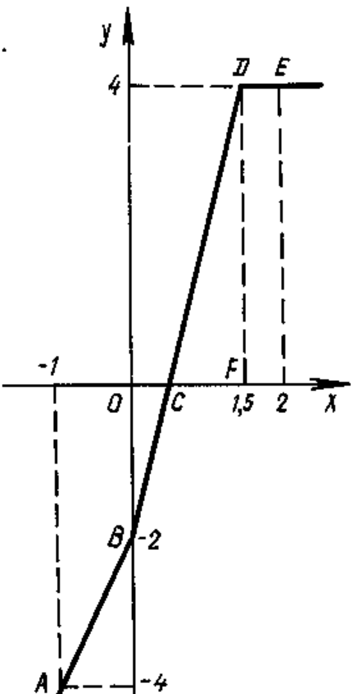


Рис. 5.5

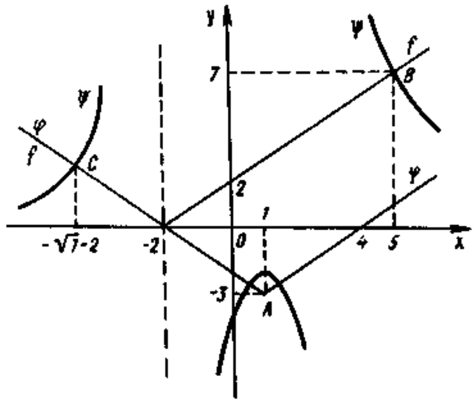


Рис. 5.6

Преобразуем данное неравенство к виду

$$|x-2|+|7-2x|-|5-x|>0.$$

Построим график функции $f(x)=|x-2|+|7-2x|-|5-x|$ (рис. 5.4). При этом необходимо помнить, что выражения $|x-2|$, $|7-2x|$, $|5-x|$ обращаются в нуль соответственно в точках 2; 3,5; 5; графиком каждой из функций $y=|x-2|$, $y=|7-2x|$, $y=|5-x|$ является объединение двух лучей, поэтому графиком функции $f(x)$ является ломаная; для построения этой ломаной находим координаты ее вершин: $f(2)=0$, $f(3{,}5)=0$, $f(5)=6$.

Кроме того, находим значение функции $f(x)$ в какой-либо точке, лежащей левее точки $x=2$, и в точке, лежащей правее точки $x=5$, например $f(0)=4$ и $f(6)=8$.

Осталось прочитать график функции $f(x)$ и записать ответ: $(-\infty; 2)\cup$ $\cup\ (3{,}5; +\infty)$.

Задача 3. Решить неравенство $|x|>|3-2x|-x-1$.

Преобразуем данное неравенство к виду $|x|-|3-2x|+x+1>0$ и построим график функции $f(x)=|x|-|3-2x|+x+1$ (рис. 5.5).

Выражения $|x|$ и $|3-2x|$ обращаются в нуль соответственно в точках 0 и 1,5. Графиком функции $f(x)$ является ломаная. Для ее построения вычисляем: $f(0)=-2$, $f(1{,}5)=4$, $f(-1)=-4$, $f(2)=4$ (точка -1 лежит левее точки 0, а точка 2 — правее точки 1,5).

Очевидно, что прямая DE параллельна оси абсцисс. Поэтому график функции $f(x)$, т.е. ломаная $ABDE$, пересекает ось абсцисс только в одной точке C. Из подобия прямоугольных треугольников OCB и FCD следует, что $OC=0{,}5$.

Ответ. $(0{,}5; +\infty)$.

Задача 4. Решить неравенство

$$\frac{7}{|x-1|-3}\geqslant |x+2|. \tag{5.6}$$

Строим графики функций $f(x)=|x+2|$, $\varphi(x)=|x-1|-3$, $\psi(x)=$ $=7/\varphi(x)$ (рис. 5.6). Графики этих функций легко строятся без применения производной, так как они монотонны на соответствующих промежутках.

Прямые $x=-2$ и $x=4$ являются вертикальными асимптотами графика функции $\psi(x)$.

Для определения абсцисс точек B и C решаем соответственно уравнения

$$\frac{7}{(x-1)-3}=x+2 \text{ и } \frac{7}{-(x-1)-3}=-x-2.$$ Получаем $B(5; 7)$ и $C(-\sqrt{7}-2; \sqrt{7})$. Прочитав рис. 5.6, имеем ответ: $[-\sqrt{7}-2; -2)\cup(4; 5]$

5.3. Иррациональные уравнения и неравенства

Предварительно построенные графики соответствующих иррациональных функций позволяют упростить поиск решений таких уравнений и неравенств.

Задача 1. Решить неравенство $x-2\leqslant\sqrt{x}$.

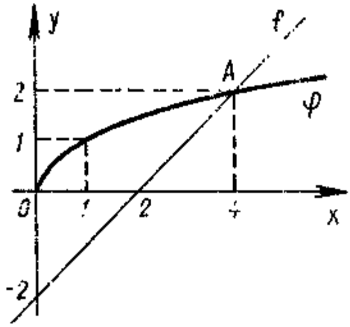


Рис. 5..

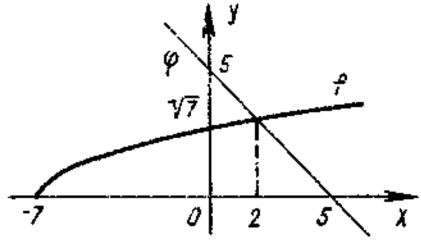


Рис. 5.8

Строим графики функций $f(x) = x - 2$ и $\varphi(x) = \sqrt{x}$ (рис. 5.7). После этого становится понятным, что уравнение $x - 2 = \sqrt{x}$ имеет только один положительный корень $x_0 > 2$, а решением данного неравенства является промежуток $[0;\ x_0)$, так как данное неравенство определено только на множестве неотрицательных чисел.

Решив уравнение $x - 2 = \sqrt{x}$ путем возведения его обеих положительных частей во вторую степень, получим $x_0 = 4$. Для решения этого уравнения характерно следующее: во-первых, уравнение $(x - 2)^2 = x$ не равносильно уравнению $x - 2 = \sqrt{x}$. Первое из них имеет корни 1 и 4, а второе — только 4. Из рис. 5.7 ясно, почему именно число 1 является посторонним корнем для уравнения $x - 2 = \sqrt{x}$ (точка A_1 есть пересечение графиков функций $f(x) = x - 2$ и $\varphi_1(x) = -\sqrt{x}$); во-вторых, предварительно построенные графики функций f и φ снимают вопрос о посторонних корнях соответствующих уравнений и неравенств.

Задача 2. Назвать множество решений неравенства

$$\sqrt{7 + x} > 5 - x\,. \tag{5.7}$$

Строим графики непрерывных монотонных функций $f(x) = \sqrt{7 + x}$ и $\varphi(x) = 5 - x$ (рис. 5.8). Функция $f(x)$ определена на $[-7;\ +\infty)$, непрерывна и монотонно возрастает. Она изменяется от 0 до $+\infty$. Функция $\varphi(x)$ определена на множестве всех действительных чисел, она монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$. Поэтому уравнение $\sqrt{7 + x} = 5 - x$ имеет единственное решение x_0. Легко заметить, что $x_0 = 2$. Прочитав рис. 5.8, записываем ответ: $(2;\ +\infty)$.

Задача 3. Решить неравенство $\sqrt[4]{x - 1} + \sqrt[4]{x + 14} \geqslant 3$.

Левая часть неравенства определена на $[1;\ +\infty)$. Функция $f_1(x) = \sqrt[4]{x - 1}$ непрерывная и монотонная (на указанном промежутке она возрастает от 0 до $+\infty$).

Функция $f_2(x) = \sqrt[4]{x + 14}$ непрерывная и монотонная (на $[1;\ +\infty)$ возрастает от $\sqrt[4]{15}$ до $+\infty$). Поэтому непрерывная функция $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ на $[1;\ +\infty)$ возрастает от $\sqrt[4]{15}$ до $+\infty$ (рис. 5.9).

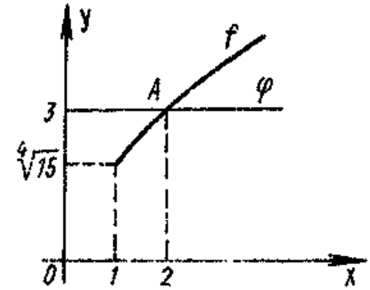


Рис. 5.9

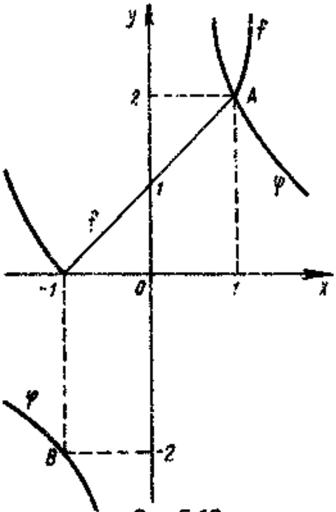


Рис. 5.10

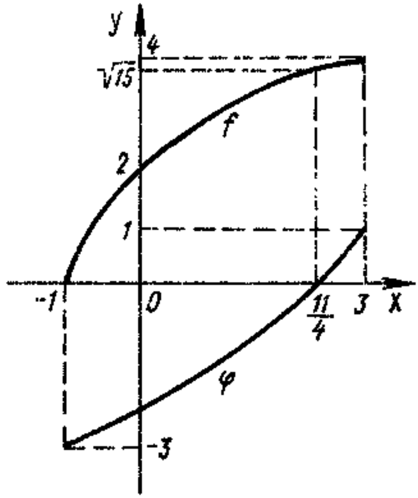


Рис. 5.11

Так как $\sqrt[4]{15} < 3$, существует единственная точка x_0, такая, что $f(x_0) = 3$. Очевидно, что $x_0 = 2$. Итак, решением данного неравенства является промежуток $[2; +\infty)$.

З а д а ч а 4. Назвать множество, точки которого являются решением неравенства

$$x^2 + x + \sqrt{(x^2+1)^2 - 4x^2} \leqslant 2/x. \tag{5.8}$$

Очевидно, что $\sqrt{(x^2+1)^2 - 4x^2} = |x^2 - 1|$, поэтому неравенство (5.8) равносильно неравенству

$$x^2 + x + |x^2 - 1| \leqslant 2/x. \tag{5.9}$$

Если $|x| \geqslant 1$, неравенство (5.9) принимает вид $2x^2 + x - 1 \leqslant 2/x$. Если $|x| < 1$, неравенство (5.9) равносильно неравенству $x + 1 \leqslant 2/x$.

Итак, строим графики функций: $\varphi(x) = 2/x$, $x < 0, x > 0$; $f(x) = \begin{cases} x+1, & |x| < 1; \\ 2x^2 + x - 1, & |x| \geqslant 1 \end{cases}$ (рис. 5.10).

Ответ. $(0;\ 1]$.

Задача 5. Решить неравенство

$$\frac{2\sqrt{x+1}}{1-2\sqrt{3-x}}<1. \qquad (5.10)$$

Выражение $2\sqrt{x+1}$ определено на $[-1;\ +\infty)$. Выражение $1-2\sqrt{3-x}$ определено и отлично от нуля на множестве $(-\infty;\ 2{,}75)\cup(2{,}75;\ 3]$. Поэтому неравенство (5.10) определено на множестве $[-1;\ 2{,}75)\cup(2{,}75;\ 3]$.

Строим графики функций $f(x)=2\sqrt{x+1}$ и $\varphi(x)=1-2\sqrt{3-x}$ на множестве $(-1;\ 2{,}75)\cup(2{,}75;\ 3]$ (рис. 5.11).

Так как на $[-1;\ 2{,}75)$ функция $f(x)$ неотрицательная, а функция $\varphi(x)$ отрицательная, то $f(x)/\varphi(x)\leqslant 0$ на этом промежутке и $[-1;\ 2{,}75)$ является решением неравенства (5.10).

Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на $(2{,}75;\ 3]$ положительные и возрастающие: $\sqrt{15}<f(x)\leqslant 4$, $0<f(x)\leqslant 1$. Поэтому на $(2{,}75;\ 3]$ $f(x)/\varphi(x)>\sqrt{15}/1>1$.

Ответ. $[-1;\ 2{,}75)$.

5.4. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

Основной путь решения логарифмических уравнений (неравенств) — это замена их рациональными уравнениями (неравенствами). При этом широко применяется метод интервалов.

Задача 1. Решить неравенство

$$\log_{x^2}(2+x)<1. \qquad (5.11)$$

Для того чтобы найти область M определения левой части неравенства (5.11), решаем системы неравенств:

$$\left.\begin{matrix}2+x>0;\\ 0<x^2<1;\end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix}2+x>0;\\ x^2>1.\end{matrix}\right\}$$

Получаем $M=(-2,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

На множестве M строим графики функций $f(x)=2+x$ и $\varphi(x)=x^2$ (рис. 5.12).

На $(-2;\ -1)$ функция $\varphi(x)>1$, а $0<f(x)<1$, поэтому все точки этого промежутка являются решением неравенства (5.11).

На $(-1;\ 0)$ $0<\varphi(x)<1$ и $f(x)>1$. Поэтому все точки и этого промежутка являются решением неравенства (5.11).

Рассмотрев таким же образом и остальные промежутки области M, получим ответ: $(-2;\ -1)\cup(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(2;\ +\infty)$.

Задача 2. Назвать промежутки, точки которых являются решениями неравенства

$$(x^2+x+1)^x<1. \qquad (5.12)$$

Строим графики функций $f(x)=x^2+x+1$ и $\varphi(x)=x$ (рис. 5.13). На мно-

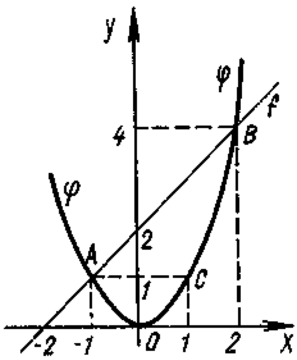


Рис. 5.12

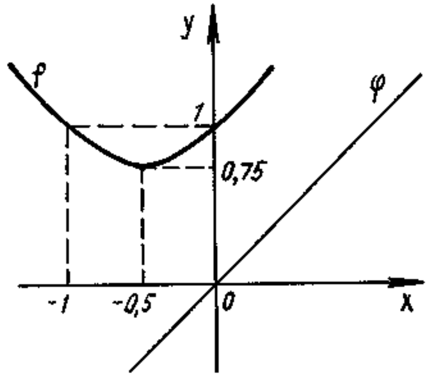


Рис. 5.13

жестве $(-\infty;\ -1)$ функция $f(x) > 1$, а $\varphi(x) < -1$. Поэтому каждая точка этого множества является решением неравенства (5.12).

На $[-1;\ -0{,}5]$ $0{,}75 \leqslant f(x) \leqslant 1$ и $\varphi(x) < 0$. Поэтому при каждом значении x из этого отрезка $(x^2 + x + 1)^x \geqslant$ $\geqslant 1$.

Изучив промежутки $(-0{,}5;\ 0]$ и $(0;\ +\infty)$, приходим к выводу, что только точки интервала $(-\infty;\ -1)$ являются решением неравенства (5.12).

З а д а ч а 3. Решить уравнение

$$\log_3 x = 1 + \frac{-3}{2x-1} \qquad (5.13)$$

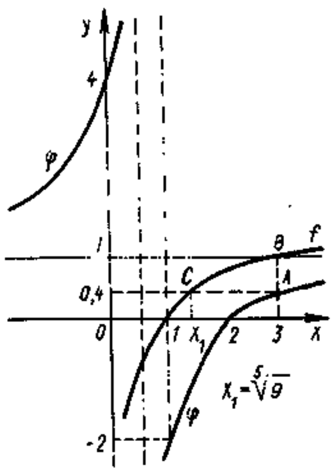


Рис. 5.14

Строим графики функций $f(x) = \log_3 x$ и $\varphi(x) = 1 + \dfrac{-3}{2x-1}$ (рис. 5.14).

На множестве $(-\infty;\ 0]$ функция $f(x)$ не определена, поэтому на этом множестве нет решений уравнений (5.13). На $(0;\ 0{,}5)$ функция $\varphi(x) > 0$, а $f(x) < 0$. Поэтому и здесь решений уравнения (5.13) нет. В точке $x = 0{,}5$ не определена функция $\varphi(x)$. На $(0{,}5;\ 1]$ функция $f(x) > -2$, а $\varphi(x) < -2$. На множестве $(1;\ 2)$ функция $f(x)$ положительная, а функция $\varphi(x)$ отрицательная. В точке $x = 2$ функция $\varphi(x) = 0$, а $f(x) > 0$. На $(2;\ 3]$ функция $\varphi(x) <$ $< 0{,}4$, а $f(x) > 0{,}4$. Наконец, на $(3;\ +\infty)$ функция $\varphi(x) < 1$, функция $f(x) >$ > 1.

Ответ. Уравнение (5.13) решений не имеет.

5.5. Системы уравнений

При решении нестандартных систем уравнений широко используются графики отдельных уравнений и метод полной индукции.

З а д а ч а 1. Решить систему уравнений

$$|y - x| = 2(x + y); \tag{5.14}$$

$$|x| + |y| = 4. \tag{5.15}$$

Левая часть уравнения (5.14) неотрицательная, поэтому $x + y \geqslant 0$, т.е. $y \geqslant -x$. Если $|y - x| = 0$, т.е. $y = x$, то $x = 0$. Если $y > x$, равенство (5.14) принимает вид $y - x = 2(x + y)$. Отсюда $y = -3x$. Если $y < x$, из уравнения (5.14) получаем $x - y = 2(x + y)$ и $y = -x/3$. Таким образом, график f уравнения (5.14) является объединением лучей OA и OB (рис. 5.15).

Так как $|x| + |y| = |-x| + |y| = |-x| + |-y| = |x| + |-y|$, осями симметрии графика уравнения (5.15) являются оси абсцисс и ординат. Строим сначала ту часть графика φ уравнения (5.15), которая принадлежит первой координатной четверти: $x + y = 4, x \geqslant 0, y \geqslant 0$. Получаем отрезок CD (рис. 5.15). Для построения всего графика φ достаточно отобразить отрезок CD относительно осей координат.

Ответ. $(-1; 3)$; $(3; -1)$.

З а д а ч а 2. Решить систему уравнений

$$|x| + x = |y| + y; \tag{5.16}$$

$$|x - 1| = x + |y|. \tag{5.17}$$

Исследуем сначала уравнение (5.16). Если $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, то $2x = 2y$, т.е. в этом случае графиком уравнения (5.16) является биссектриса OA первого координатного угла (рис. 5.16).

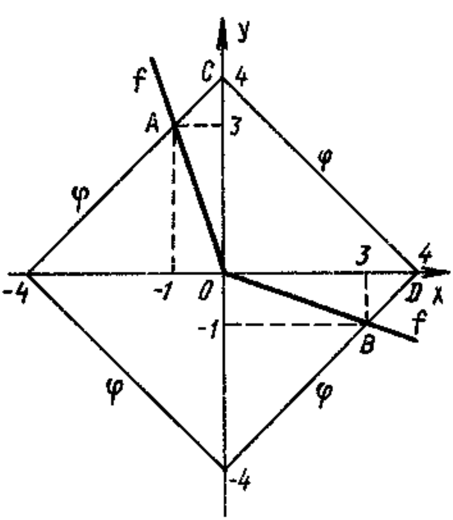


Рис. 5.15

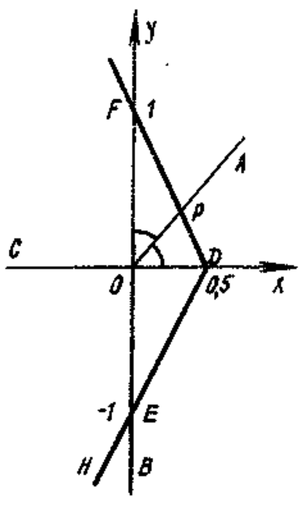


Рис. 5.16

Если $x < 0$ и $y \geqslant 0$, то $0 = 2y$, т.е. графиком уравнения (5.16) будет луч OC (рис. 5.16).

Пусть $x \leqslant 0$ и $y \leqslant 0$. Тогда равенство (5.16) принимает вид $0 = 0$. Это означает, что все точки третьего координатного угла являются решениями этого уравнения.

Пусть, наконец, $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$. Тогда уравнение преобразуется к виду $2x = 0$, т.е. $x = 0$.

Таким образом, решениями уравнения (5.16) являются все точки третьего координатного угла (включая его стороны) и точки биссектрисы OA первого координатного угла (рис. 5.16).

Исследуем уравнение (5.17). Если $x \geqslant 1$, то $x - 1 = x + |y|$, т.е. решений уравнение (5.17) не имеет.

Пусть $x < 1$. Получаем $1 - x = x + |y|$ или $x = 0{,}5\,(1 - |y|)$.

Итак, графиком уравнения (5.17) является объединение лучей DF и DE (рис. 5.16).

Находим координаты точки P, в которой пересекаются лучи OA и DF. Отрезок OP — биссектриса угла DOF треугольника DOF. Поэтому $DP : PF = OD : OF = 1 : 2$. Отсюда следует, что $P\,(1/3;\ 1/3)$.

Таким образом, решением системы уравнений (5.16) и (5.17) являются каждая точка луча EH (рис. 5.16) и точка $P\,(1/3;\ 1/3)$.

5.6. Уравнения и неравенства с параметрами

Трудности решения таких уравнений и неравенств вызываются прежде всего тем, что в любом случае приходится производить ветвление всех значений параметров на отдельные классы, при каждом из которых уравнение или неравенство имеет решение. При этом необходимо последовательно следить за равносильностью решаемых уравнений (неравенств) с учетом области определения входящих в них выражений и учитывать выполнимость отдельных операций.

З а д а ч а 1. Решить относительно x неравенство $x - 1 \geqslant \sqrt{a - x^2}$.

Построим графики функций $f(x) = x - 1$ и $\varphi(x) = \sqrt{a - x^2}$, $a \geqslant 0$, при различных значениях параметра a.

Графиком функции $\varphi(x)$ является полуокружность, расположенная в верхней полуплоскости, с центром в точке $x = 0$ и радиусом a (рис. 5.17). Теперь ясно, что уравнение $x - 1 = \sqrt{a - x^2}$ имеет единственное решение x_0, если $a \geqslant 1$. Решением данного неравенства является отрезок $[x_0;\ \sqrt{a}]$.

Решив уравнение $x - 1 = \sqrt{a - x^2}$, получим два корня. После проведенного исследования легко найти среди них посторонний.

Ответ. $[0{,}5\,(1 + \sqrt{2a - 1});\ \sqrt{a}\,]$.

З а д а ч а 2. Решить относительно x неравенство

$$\sqrt{x} - \sqrt{x - 1} > a,\quad a > 0.$$

Неравенство определено на полуинтервале $[1;\ +\infty)$. Умножив обе части его на положительное выражение $\sqrt{x} + \sqrt{x - 1}$, получим $1 > a\,(\sqrt{x} + \sqrt{x - 1})$.

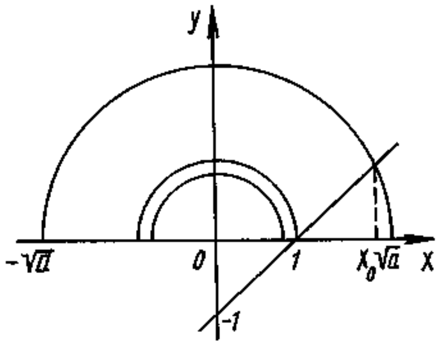


Рис. 5.17

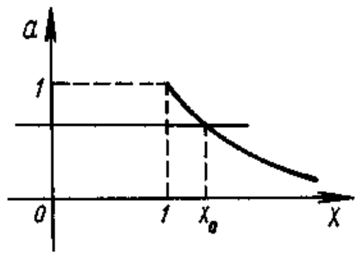


Рис. 5.18

Отсюда

$$a < (\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^{-1}. \qquad (5.18)$$

Функции $a_1(x) = \sqrt{x}$ и $a_2(x) = \sqrt{x-1}$ положительные, монотонно возрастающие, значит, и функция $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-1}$ положительная, монотонно возрастающая. Находим $y(1) = 1$, поэтому функция y на $[1; +\infty)$ изменяется непрерывно от 1 до $+\infty$.

Таким образом, функция $y_1 = (\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^{-1}$ монотонная. Она определена на множестве $[1; +\infty)$. Область ее изменения — полуинтервал $(1; 0)$. Построим ее график (рис. 5.18). Теперь ясно, что решение неравенства (5.18) есть промежуток $[1; x_0)$, если $0 < a \leqslant 1$, где x_0 — корень уравнения $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = a$. Решаем это уравнение:

$$\sqrt{x} - a = \sqrt{x-1}; \quad (\sqrt{x} - a)^2 = (\sqrt{x-1})^2;$$

$$a^2 + 1 = 2a\sqrt{x}; \quad (a^2+1)^2 = 4a^2x; \quad x_0 = (1+a^2)^2/4a^2.$$

Получаем $1 \leqslant x < \dfrac{(1+a^2)^2}{4a^2}$, $0 < a \leqslant 1$.

З а д а ч а 3. Решить неравенство $\log_{0,5}(x^2 - 2x + a) > -3$ относительно x.

Из неравенства следует $0 < x^2 - 2x + a < 8$. Отсюда $-x^2 + 2x < a < -x^2 + 2x + 8$. Строим графики функций $a = -x^2 + 2x$, $a = -x^2 + 2x + 8$ (рис. 5.19). Из графиков видно, что задача решений не имеет, если $a \geqslant 9$. Если $1 < a < 9$, то $x_1 < x < x_2$ (x_1, x_2 — корни уравнения $a = -x^2 + 2x + 8$).

Если $a \leqslant 1$, то $x_1' < x < x_3'$ или $x_4 < x < x_2'$ (x_1', x_2' — корни уравнения $a = -x^2 + 2x + 8$, x_3, x_4 — корни уравнения $a = -x^2 + 2x$).

З а д а ч а 4. Решить неравенство $\sqrt{2x - a} > x$.

Строим графики функций $f(x) = x$ (рис. 5.20) и $\varphi(x) = \sqrt{2x - a}$ (при различных значениях a).

Прочитав рис. 5.20, получим:

1) $a \geqslant 1$, решений неравенство не имеет;

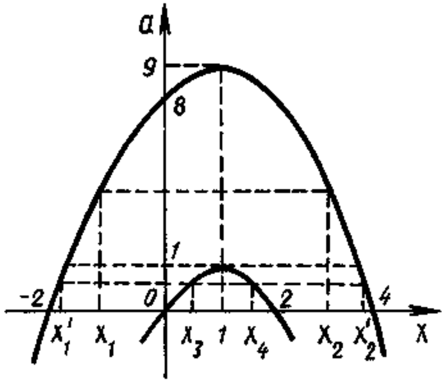


Рис. 5.19

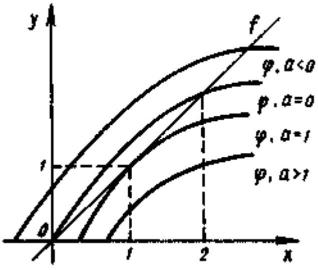


Рис. 5.20

2) $0 < a < 1$, решением неравенства являются точки интервала $(x_1;\ x_2)$, где $x_1 = 1 - \sqrt{1-a}$, $x_2 = 1 + \sqrt{1-a}$. Числа x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 = 2x - a$;

3) $a = 0$, $0 < x < 2$;

4) $a < 0$, $0{,}5a \leqslant x \leqslant 1 + \sqrt{1-a}$.

Задача 5. Доказать, что уравнение вида

$$x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_1 x - a_0 = 0, \tag{5.19}$$

где

$$a_0 \geqslant 0, \dots, a_{n-1} \geqslant 0;\ \ a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} > 0, \tag{5.20}$$

имеет единственный положительный корень.

Преобразуем уравнение (5.19):

$$x^n = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0. \tag{5.21}$$

Разделив обе части уравнения (5.21) на x^n, получим

$$1 = \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} = f(x). \tag{5.22}$$

Из условия (5.20) ясно, что хотя бы один из неотрицательных коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ отличен от нуля, поэтому на множестве положительных чисел правая часть уравнения (5.22) положительна.

Очевидно, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f(0) = +\infty$.

Функция $f(x)$ на множестве положительных чисел непрерывна. Она является убывающей (как сумма невозрастающих неотрицательных функций). Поэтому существует единственный положительный корень уравнения (5.22).

Задача 6. Выяснить, каким необходимым и достаточным условиям должны удовлетворять действительные числа a, b, c, для того чтобы уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имело три действительных корня, образующих арифметическую прогрессию.

Обозначим $x = p + t$. После этого данное уравнение можно записать в виде

$$t^3 + (a + 3p)t^2 + (3p^2 + 2ap + b)t + \\ + (p^3 + ap^2 + bp + c) = 0. \tag{5.23}$$

Если $p = -a/3$, т.е. $a + 3p = 0$, уравнение (5.23) принимает вид

$$t^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)t + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0 \tag{5.24}$$

или

$$t^3 = \left(\frac{a^2}{3} - b\right)t + \left(\frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27} - c\right). \tag{5.25}$$

Построим графики функций $f(t) = t^3$ и $\varphi(t) = \left(\frac{a^2}{3} - b\right)t + \left(\frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27} - c\right)$ (рис. 5.21). Теперь ясно, что если $\frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27} - c = 0$ и $\frac{a^2}{3} - b \geqslant 0$, то прямая $\varphi(t)$ пересекает кубическую параболу $f(t)$ в точках A и B, симметричных относительно начала координат. Если $a^2/3 - b \geqslant 0$, $ab/3 - 2a^3/27 - c \neq 0$ и прямая $\varphi(t)$ пересекает график функции $f(t)$, то корни уравнения (5.25) не симметричны относительно начала координат.

З а д а ч а 7. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 + 4x - 2|x - a| + 2 - a = 0 \tag{5.26}$$

имеет два корня.

Если $x \geqslant a$, уравнение (5.26) можно записать в виде

$$a = -x^2 - 2x - 2. \tag{5.27}$$

Если $x < a$, уравнение (5.26) равносильно уравнению

$$a = (x^2 + 6x + 2)/3. \tag{5.28}$$

Строим графики функций (5.27) и (5.28) (рис. 5.22). Проанализировав их, получим ответ: уравнение (5.26) имеет точно два решения, если $a > -2$ или $a < -7/3$.

5.7. Применение производных

Применение производной упрощает поиск числа корней уравнения, доказательство неравенств с многими переменными, решение иррациональных, показательных, логарифмических и других неравенств.

З а д а ч а 1. Найти число положительных корней уравнения

$$x^3 - 10x^2 + 1 = 0.$$

Функция $y = x^3 - 10x^2 + 1$ определена на $(-\infty; +\infty)$ и непрерывна. Получаем $y' = 3x^2 - 20x$, $y'(0) = 0$, $y'(20/3) = 0$, $y(0) = 1 > 0$, $y(20/3) < 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty.$$

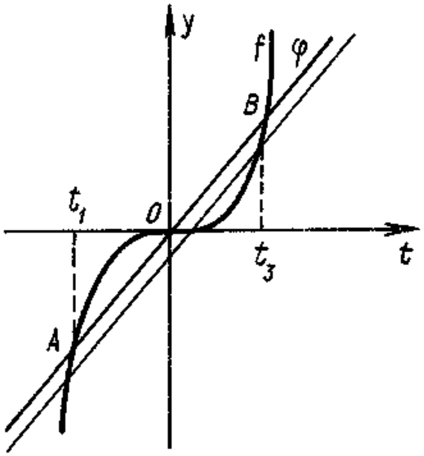


Рис. 5.21

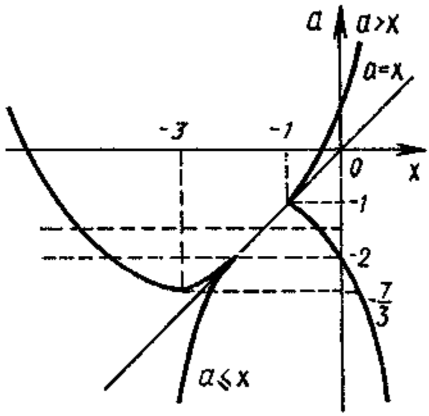


Рис. 5.22

Итак, функция $y = x^3 - 10x^2 + 1$ убывает на $[0;\ 20/3]$ и возрастает на $[20/3;\ +\infty)$. Поэтому один из положительных корней данного уравнения принадлежит $(0;\ 20/3)$, а второй — $(20{,}3;\ +\infty)$.

Задача 2. Доказать, что $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \geqslant 3$, $a, b, c > 0$.

Будем считать, что $a \geqslant b \geqslant c$. Функция $f(a) = a/b + b/c + c/a - 3$ (b и c — параметры) определена и непрерывна на $(0;\ +\infty)$. Находим $f'(a) = 1/b - c/a^2$. Из уравнения $1/b - c/a^2 = 0$ следует, что $a = \sqrt{bc}$. Но так как $a \geqslant b \geqslant c$, последнее равенство возможно только в том случае, когда $a = b = c$.

Итак, если $f'(a) = 0$, то и $f(a) = 0$. Получаем $\lim\limits_{a \to 0} f(a) = +\infty$, $\lim\limits_{a \to +\infty} f(a) = +\infty$. Задача решена.

6. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ НЕСТАНДАРТНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

6.1. Графики функций

Умение строить графики уравнений является одним из основных критериев, которые определяют уровень математической подготовки учителя.

Задача 1. Построить график уравнения $|x-y|=2$.

Данное уравнение равносильно совокупности уравнений $x-y=2$ и $x-y=-2$. Ответ показан на рис. 6.1.

Задача 2. Построить график уравнения

$$2|x|+3|y|=6. \tag{6.1}$$

Так как уравнение содержит только переменные $|x|$ и $|y|$, осями симметрии его графика являются оси Ox и Oy.

Рассмотрим уравнение (6.1) при $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Получим $2x+3y=6$. Графиком системы $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $2x+3y=6$ является отрезок AB (рис. 6.2).

Отобразив отрезок AB относительно осей координат, получим ромб $ABCD$. Его граница является графиком данного уравнения.

Задача 3. Построить график уравнения

$$|x|-|2y|=1. \tag{6.2}$$

График данного уравнения имеет две оси симметрии (оси координат). Построим часть графика уравнения (6.1), расположенную в первой координатной четверти. Если $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, то $x-2y=1$ или $y=0{,}5(x-1)$. Получаем луч AB (рис. 6.3). Отобразив его относительно осей координат, имеем решение задачи.

Задача 4. Построить график уравнения $|y-x|=x$.

Левая часть уравнения неотрицательная, поэтому $x \geqslant 0$. Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left.\begin{matrix} x \geqslant 0; \\ y-x=x; \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x \geqslant 0; \\ y-x=-x \end{matrix}\right\} \text{ или } \left.\begin{matrix} x \geqslant 0; \\ y=2x; \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x \geqslant 0; \\ y=0. \end{matrix}\right\}$$

Ответ показан на рис. 6.4.

Задача 5. Построить график уравнения

$$|y-x|=2(x+y). \tag{6.3}$$

Левая часть уравнения неотрицательная, поэтому $x+y \geqslant 0$, т.е. $y \geqslant -x$. Это означает, что график данного уравнения расположен на прямой $y=-x$ и выше ее. Уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left.\begin{matrix} y \geqslant -x; \\ y-x=2(x+y); \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} y \geqslant -x; \\ y-x=-2(x+y) \end{matrix}\right\}$$

или

$$\left.\begin{matrix} y \geqslant -x; \\ y=-3x; \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} y \geqslant -x; \\ y=-x/3. \end{matrix}\right\}$$

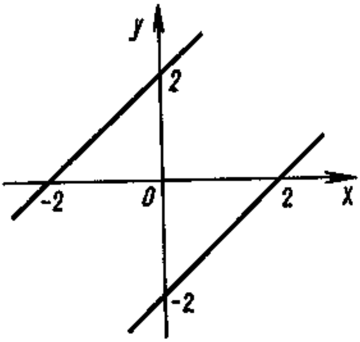


Рис. 6.1

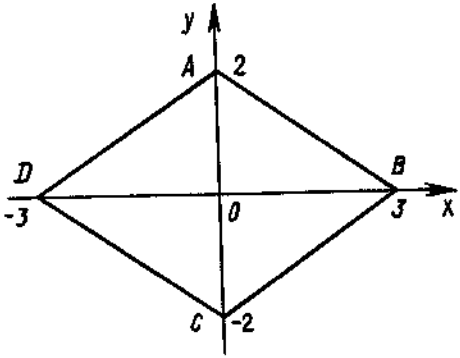


Рис. 6.2

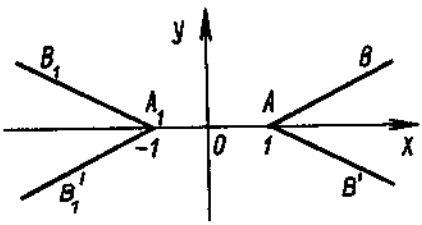


Рис. 6.3

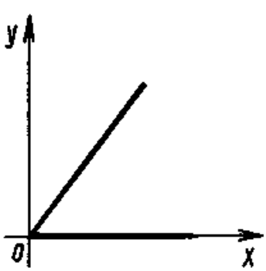


Рис. 6.4

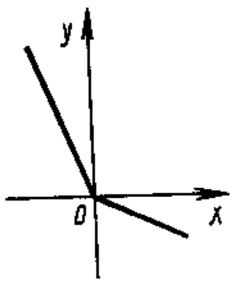


Рис. 6.5

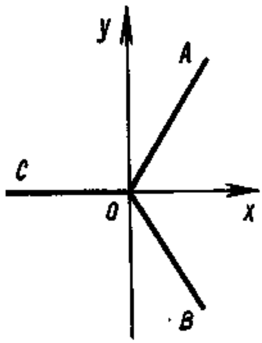


Рис. 6.6

Ответ показан на рис. 6.5.

З а д а ч а 6. Построить график уравнения $|x| = |y| - x$.

График уравнения имеет ось симметрии (ось Ox). Если $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, то $x = y - x$, т.е. $y = 2x$. Если $x < 0$ и $y \geqslant 0$, то $-x = y - x$, т.е. $y = 0$. Графиком уравнения является объединение лучей OA, OB и OC (рис. 6.6).

З а д а ч а 7. Построить график уравнения $|x - 1| = x + |y|$.

Осью симметрии графика данного уравнения является ось Ox. Если $x \geqslant 1$ и $y \geqslant 0$, то $x - 1 = x + y$ (график этого уравнения — пустое множество). Если $x < 1$ и $y \geqslant 0$, то $1 - x = x + y$, т.е. $y = 1 - 2x$. Итак, графиком данного уравнения является объединение лучей AB и AB_1 (рис. 6.7).

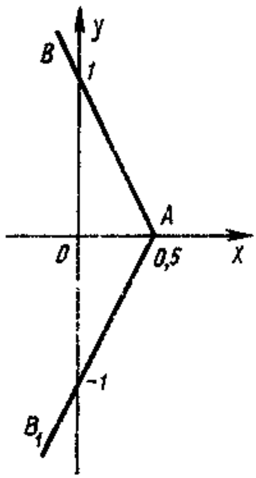


Рис. 6.7

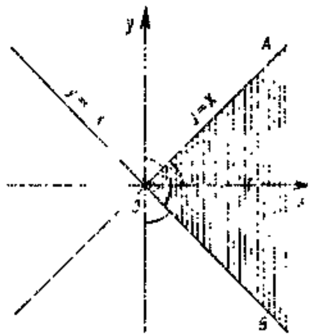


Рис. 6.8

З а д а ч а 8. Построить график уравнения

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}+2\sqrt{x^2+1}=\sqrt{6}\,(x+1). \qquad (6.4)$$

Пусть $\overline{a}=(1;\ 1;\ 2)$; $\overline{b}=(\sqrt{x+y};\ \sqrt{x-y};\ \sqrt{x^2+1})$. Длины этих векторов равны соответственно $\sqrt{6}$ и $|x+1|$, а скалярное произведение по условию равно $\sqrt{6}\,(x+1)$, следовательно, векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны. т.е. $\sqrt{x+y}=\sqrt{x-y}=0{,}5\sqrt{x^2+1}$. Отсюда $y=0$, $x_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$, так что график уравнения (6.4) состоит из двух точек: $A\,(2-\sqrt{3};\ 0)$ и $B\,(2+\sqrt{3};\ 0)$.

Естественный поиск решения задачи можно организовать следующим образом. Во-первых, уравнение (6.4) определено, если $x+1>0$, $x+y\geqslant 0$, $x-y\geqslant 0$. Поэтому точки искомого графика принадлежат углу AOB (рис. 6.8), т.е. $x\geqslant 0$ и $|y|\leqslant x$; во-вторых, уравнение (6.4) является иррациональным, причем y содержится под корнями только первой степени. Поэтому попытаемся решить уравнение (6.4) относительно y.

Преобразуем уравнение (6.4):

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=\sqrt{6}\,(x+1)-2\sqrt{x^2+1}. \qquad (6.5)$$

Левая часть уравнения (6.5) неотрицательная, поэтому

$$\sqrt{6}\,(x+1)-2\sqrt{x^2+1}\geqslant 0. \qquad (6.6)$$

Неравенство (6.6) при $x\geqslant 0$ можно преобразовать следующим образом:

$$\sqrt{6}\,(x+1)\geqslant 2\sqrt{x^2+1};\quad 6\,(x+1)^2\geqslant 4\,(x^2+1);$$

$$2x^2+12x+2\geqslant 0. \qquad (6.7)$$

При $x\geqslant 0$ неравенство (6.7) верно, поэтому левая и правая части уравнения (6.5) неотрицательны при всех $x\geqslant 0$.

Возведем обе части уравнения (6.5) в квадрат:

$$2x+2\sqrt{x^2-y^2}=(\sqrt{6}\,(x+1)-2\sqrt{x^2+1})^2.$$

Отсюда

$$\sqrt{x^2-y^2}=(\sqrt{3}(x+1)-\sqrt{2}\sqrt{x^2+1})^2-x; \tag{6.8}$$

$$\sqrt{x^2-y^2}=5(x^2+x+1)-2\sqrt{6}\,(x+1)\sqrt{x^2+1}. \tag{6.9}$$

Левая часть уравнения (6.9) неотрицательная, поэтому

$$5(x^2+x+1)-2\sqrt{6}\,(x+1)\sqrt{x^2+1}\geqslant 0. \tag{6.10}$$

Преобразуем неравенство (6.10):

$$5(x^2+x+1)\geqslant 2\sqrt{6}\,(x+1)\sqrt{x^2+1};$$

$$25(x^2+x+1)^2\geqslant 24(x+1)^2\,(x^2+1);$$

$$25(x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x)-24(x^2+2x+1)\times$$
$$\times\,(x^2+1)\geqslant 0;$$

$$x^4+2x^3+27x^2+2x+1\geqslant 0. \tag{6.11}$$

При неотрицательных значениях x неравенство (6.11) верно, поэтому обе части уравнения (6.8) неотрицательные. Теперь уравнение (6.8) преобразуем так:

$$x^2-y^2=((\sqrt{3}(x+1)-\sqrt{2}\sqrt{x^2+1})^2-x)^2;$$

$$y^2=x^2-((\sqrt{3}(x+1)-\sqrt{2}\sqrt{x^2+1})^2-x)^2;$$

$$y^2=-(\sqrt{3}(x+1)-\sqrt{2}\sqrt{x^2+1})^4+2x\,(\sqrt{3}(x+1)-$$
$$-\sqrt{2}\sqrt{x^2+1})^2=(\sqrt{3}(x+1)-\sqrt{2}\sqrt{x^2+1})^2\,(2x-$$
$$-\,(\sqrt{3}(x+1)-\sqrt{2}\sqrt{x^2+1})^2). \tag{6.12}$$

Левая часть уравнения (6.12) неотрицательная, поэтому

$$2x-(\sqrt{3}\,(x+1)-\sqrt{2x^2+2})\geqslant 0. \tag{6.13}$$

Преобразуем неравенство (6.13):

$$2x-3(x+1)^2+2\sqrt{3}\,(x+1)\sqrt{2x^2+2}-2x^2-2\geqslant 0;$$

$$2\sqrt{3}\,(x+1)\sqrt{2x^2+2}\geqslant 5x^2+4x+5. \tag{6.14}$$

Обе части неравенства (6.14) при $x\geqslant 0$ неотрицательные. Возводим обе части этого неравенства в квадрат:

$$12(x+1)^2\,(2x^2+2)\geqslant(5x^2+4x+5)^2.$$

После равносильных преобразований это неравенство принимает вид

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 8x + 1 \leqslant 0. \tag{6.15}$$

Итак, нам необходимо решить систему неравенств

$$\left.\begin{aligned} &x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 8x + 1 \leqslant 0;\\ &x \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.16}$$

Уравнение

$$x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 8x + 1 = 0 \tag{6.17}$$

можно преобразовать следующим образом:

$$x^4 + 18x^2 + 1 = 8x^3 + 8x;$$

$$x^4 + 18x^2 + 1 = 8x\,(x^2 + 1);$$

$$(x^2 + 1)^2 + 16x^2 = 8x(x^2 + 1);$$

$$(x^2 + 1)^2 - 8x(x^2 + 1) + 16x^2 = 0. \tag{6.18}$$

Решаем квадратное относительно $x^2 + 1$ уравнение (6.18):

$$x^2 + 1 = 4x \pm \sqrt{16x^2 - 16x^2} = 4x.$$

Теперь понятно, что уравнение (6.17) равносильно уравнению

$$x^2 - 4x + 1 = 0. \tag{6.19}$$

Его корни: $x_1 = 2 - \sqrt{3}$, $x_2 = 2 + \sqrt{3}$.

При решении неравенства (6.15) используем метод интервалов: $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$, $f(1) > 0$, $f(2) > 0$, $f(4) = 1 > 0$. Отсюда ясно, что только точки x_1 и x_2 являются решениями системы неравенств (6.16). Получаем уже известный ответ.

6.2. Графики неравенств

При построении графиков неравенств целесообразно использовать метод полной индукции.

Задача 1. На координатной плоскости изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 \leqslant 4. \tag{6.20}$$

Исследуем неравенство в каждой из координатных четвертей. Если $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, левая часть неравенства (6.20) равна нулю, поэтому каждая точка первого координатного угла является решением данного неравенства.

Если $x \geqslant 0$ и $y < 0$, неравенство (6.20) имеет вид $4y^2 \leqslant 4$, т.е. $-1 \leqslant y < 0$. Если $x < 0$ и $y \geqslant 0$, получаем $4x^2 \leqslant 4$, т.е. $-1 \leqslant x < 0$. Если $x < 0$ и $y < 0$, неравенство (6.20) равносильно неравенству $x^2 + y^2 \leqslant 1$. (Напомним, что $x^2 + y^2 = 1$ является уравнением окружности радиусом, равным 1, с центром в

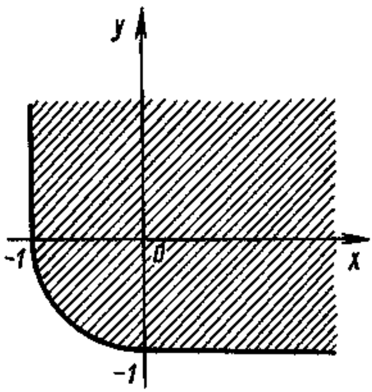


Рис. 6.9

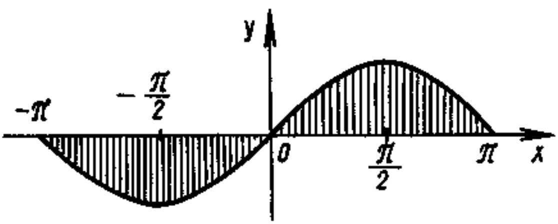


Рис. 6.10

начале координат.) Решение показано на рис. 6.9.

З а д а ч а 2. На координатной плоскости изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\log_{1+y}(1+\sin x) > 1, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi. \tag{6.21}$$

График уравнения

$$\log_{1+y}(1+\sin x) = 1 \tag{6.22}$$

показан на рис. 6.10. Точки $-\pi$; $-0{,}5\pi$; 0; π не рассматриваются, потому что при этих значениях x уравнение (6.22) не имеет решений.

Если $0 < 1 + y < 1$, т.е. $-1 < y < 0$, неравенство (6.21) равносильно неравенству $1 + \sin x < 1 + y$, т.е. $y > \sin x$. Если $1 + y > 1$, то неравенство (6.21) равносильно неравенству $y < \sin x$. Ответ изображен на рис. 6.10.

7. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

7.1. Основные положения

Уравнение — одно из самых важных понятий современного школьного курса математики. Если некоторую величину невозможно измерить непосредственно или вычислить по известной формуле, то для ее определения составляется уравнение или система уравнений. Уравнения, неравенства и системы уравнений и неравенств являются математическими моделями очень многих физических и иных моделей.

В школьной математике изучаются, как правило, уравнения, в которых переменные принимают только числовые значения. Согласно школьным учебникам, решить уравнение — значит найти все значения переменных, при которых оно становится верным равенством, или доказать, что таких значений не существует.

Задачи на составление уравнений, или текстовые алгебраические задачи, представляют собой традиционный раздел школьной математики. Решение этих задач способствует развитию логического мышления, сообразительности и наблюдательности, умения самостоятельно проводить небольшие исследования.

Все текстовые задачи на составление уравнений можно разделить на две группы: с неименованными величинами и с именованными величинами. К первой группе относятся задачи с абстрактными числовыми данными или одноименными величинами (на нахождение цифр числа, определение чисел по их сумме и разности, отыскание чисел по их сумме и отношению, пропорциональное деление, и т.п.). Ко второй группе относятся задачи на совместную работу, движение и т.д. Многие геометрические задачи можно отнести к задачам с одноименными величинами или к задачам с тремя величинами.

Благодаря задачам на составление уравнений понятие функциональной зависимости становится не только одним из важнейших понятий современного школьного курса математики, но и основным стержнем, соединяющим арифметику, алгебру, геометрию и тригонометрию. Умение составлять уравнение (систему уравнений) по условию задачи является одним из главных критериев уровня математического мышления учащихся. Функциональный подход позволяет объединять также задачи, решаемые методом составления уравнений, которые кажутся несхожими.

В начале решения задачи нового типа целесообразно изучить функциональную зависимость между величинами, которая характерна для этих задач; записать формулы зависимости; выразить значения одних величин через другие; составить из простых задач сложную и только потом приступить к решению более сложных текстовых задач.

7.2. Методика решения нестандартных текстовых задач

Мы не останавливаемся здесь на анализе той схемы решения текстовых задач методом составления уравнений, которой пользуются школьники. Она хорошо оправдывает себя при решении несложных задач. При решении же сложных задач трудно с самого начала установить, какую из неизвестных величин обозначить x, и еще сложнее выразить через одну (или даже две переменные) все остальные неизвестные величины. Такой подход затрудняет и составление уравнений. Поэтому главное при решении сложной текстовой задачи — это последовательный перевод на язык уравнений и неравенств каждого ее предложения. При этом число переменных, которые войдут в эти уравнения или неравенства, не ограничивается.

Задача 1. Из пункта A в пункт B в 8 ч утра выходит скорый поезд. В этот же момент из B в A выходят пассажирский и курьерский поезда. Скорость пассажирского поезда в два раза меньше скорости курьерского. Скорый поезд прибывает в пункт B в 13 ч 50 мин того же дня, а встречается с курьерским не ранее 10 ч 30 мин утра. Найти время прибытия пассажирского поезда в пункт A, если известно, что между моментами встреч скорого поезда с курьерским и скорого с пассажирским проходит не менее часа.

Обозначим: s — расстояние между пунктами A и B; $v_п$ — скорость пассажирского поезда; $v_с$ — скорость скорого поезда; $v_к = 2v_п$ — скорость курьерского поезда. Очевидно, что

$$s/v_с = 35/6 \tag{7.1}$$

(13 ч 50 мин — 8 ч = 5 ч 50 мин = 35/6 ч).

Далее, $s/(v_с + 2v_п) \geqslant 2{,}5$, так как скорый поезд встречается с курьерским не ранее чем через 2,5 ч. Наконец, $s/(v_с + v_п) - s/(v_с + 2v_п) \geqslant 1$, потому что между моментами встреч скорого поезда с курьерским и пассажирским проходит не менее 1 ч.

Выразив s через $v_с$ из уравнения (7.1) и подставив его в последние два неравенства, имеем:

$$\frac{35}{6} v_с/(v_с + 2v_п) \geqslant 2{,}5; \quad v_п/v_с \leqslant 2/3; \tag{7.2}$$

$$\frac{35}{6} v_с/(v_с + v_п) - \frac{35}{6} v_с/(v_с + 2v_п) \geqslant 1;$$

$$\frac{2}{3} \leqslant \frac{v_п}{v_с} \leqslant \frac{3}{4}. \tag{7.3}$$

Из неравенств (7.2) и (7.3) следует, что

$$v_п/v_с = 2/3. \tag{7.4}$$

Из уравнений (7.1) и (7.4) получаем $s/v_п = 8{,}75$ (ч). Таким образом, пассажирский поезд был в пути 8,75 ч. Прибывает он в пункт A в 16 ч 45 мин.

Задача 2. Два велосипедиста выехали одновременно из пункта A в пункт $Б$. Первый остановился через 42 мин, не доехав 1 км, а второй через 52 мин, не доехав 2 км до пункта $Б$. Если бы первый велосипедист проехал столько же километров, сколько второй, а второй столько, сколько первый, то первому потребовалось бы на 17 мин меньше, чем второму. Сколько километров между пунктами A и $Б$?

Пусть s — расстояние между пунктами A и $Б$. Тогда первый велосипедист до остановки проехал $s - 1$ (км), а второй — $s - 2$ (км). Если v_1 и v_2 — соответственно скорости первого и второго велосипедистов, то

$$v_1 = (s-1)/42; \tag{7.5}$$

$$v_2 = (s-2)/52. \tag{7.6}$$

Далее,

$$\frac{s-1}{v_2} - \frac{s-2}{v_1} = 17. \tag{7.7}$$

Система уравнений (7.5) – (7.7) сводится к следующему уравнению:

$$\frac{52(s-1)}{s-2} - \frac{42(s-2)}{s-1} = 17.$$

Обозначим $(s-1)/(s-2) = x$. Тогда $52x - 42/x = 17$. Получаем $x = 14/13$ (второй корень этого уравнения посторонний), $s = 15$ км.

8. ЛОГИЧЕСКИЕ И КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

8.1. Методы решения логических задач

Матричный метод. Рассмотрим матрицу из *n* строк и *n* столбцов. Любое из направлений по строкам или столбцам назовем входом. Такая матрица имеет четыре входа: сверху, снизу, слева, справа. Будем называть элемент матрицы совместным, если к нему можно подойти по любому входу. Если этого сделать нельзя, такой элемент назовем несовместным. Применение матричного метода покажем на примере. (Несовместные элементы на рисунках заштрихованы.)

Задача 1. В купе одного из вагонов поезда Москва—Одесса ехали москвич, ленинградец, туляк, киевлянин, харьковчанин, одессит. Их фамилии начинались буквами *А, Б, В, Г, Д, Е*. В дороге выяснилось, что: 1) *А* и москвич — врачи, *Д* и ленинградец — учителя, а туляк и *В* — инженеры; 2) киевлянин, *Б* и *Е* — участники Великой Отечественной войны, а туляк в армии не служил; 3) харьковчанин старше *А*, одессит старше *В*, а *Е* — самый молодой; 4) *Б* и москвич вышли в Киеве, а *В* и харьковчанин — в Виннице. Определить начальную букву фамилии и профессию каждого пассажира.

Составляем матрицу с двумя входами, по одному входу располагаем местожительство, по второму — фамилии пассажиров (рис. 8.1). Элементы *АМ, ДЛ, ТВ, АЛ, АТ, ДМ, ДТ, ВЛ, ВМ* несовместны (по первому условию задачи). Согласно второму условию, несовместны элементы *БТ* и *ЕТ*. На входе по столбцу *Т* остался только один элемент. Поэтому по строке *Г* все элементы, кроме *ГТ*, несовместны. Согласно третьему условию, несовместны элементы *АХ, ВО, ЕХ, ЕО*. По четвертому условию задачи несовместны элементы *БМ, ВХ, БХ*. Теперь ясно, что несовместны все элементы строки *Е*, за исключением *ЕМ*. Несовместны также все элементы строки *Д*, кроме *ДХ*, все элементы строки *Б*, кроме *БЛ*, все элементы строки *А*, за исключением *АО*. Таким образом, получаем ответ (рис. 8.2).

Задача 2. В пионерском лагере в одной палатке жили Алексей, Борис, Валерий и Григорий. При знакомстве оказалось, что они учатся в разных классах начальной школы; каждый из них занимается в одном из кружков: шахматном, юннатском, конструкторском, фотокружке. Известно также, что: 1) *А* и второклассник учатся в одной школе, юннат и первоклассник живут в одном городе, *Б* и фотограф приехали в лагерь позже других; 2) *В* и четвероклассник ходили утром в поход, а вечером *Б* и третьеклассник выиграли в городки у *В* и конструктора; 3) *Г* моложе фотографа, *А* старше *В*, шахматист старше *А*; 4) в воскресенье *А* и конструктор участвовали в соревновании, четвероклассник был судьей, фотограф был болен. Определите имена и род занятий каждого ученика.

Составляем матрицу с тремя входами (рис. 8.3). Несовместные элементы отмечаем различной штриховкой в зависимости от условия. Элементы *2А, 1Ю, БФ* несовместны (по первому условию задачи). Согласно второму условию, несовместны элементы *3Б, 3В, 4В, КЗ, БК, ВК*. По третьему условию несов-

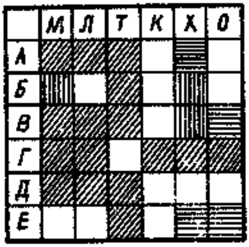


Рис. 8.1

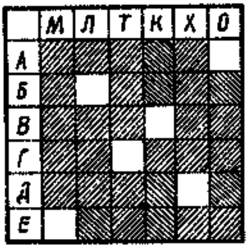


Рис. 8.2

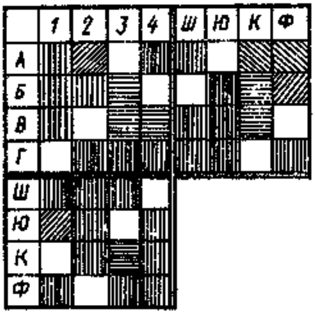


Рис. 8.3

местны *4Г, 1Ф, 4А, АШ, 1А.* Из рис. 8.3 видно, что *А* – третьеклассник, потому что шахматист старше *А* и может быть только четвероклассником. Отсюда получаем, что несовместны элементы *1Ш, 2Ш, 3Ш, 4Ю, 4К, 4Ф.* Очевидно, что несовместен элемент *3Г*, поэтому четвероклассником может быть только *Б*, и несовместны элементы *1Б, 2Б.* Теперь ясна несовместность элементов *БЮ, ВШ, ГШ.* Из четвертого условия задачи следует несовместность элементов *АК* и *АФ*, а отсюда – несовместность элементов *ВЮ, ГЮ* и *ГФ*. Так как *3Г* моложе фотографа, элементы *2Г* и *1В* несовместны. Оставшиеся несовместные элементы очевидны. Полученная матрица дает решение задачи.

Применение графов. С помощью графов можно наглядно представить объекты и отношения между ними. В этом случае легко усматриваются все логические возможности изучаемой ситуации. Благодаря своей обозримости графы позволяют классифицировать эти возможности, отбрасывать неподходящие случаи, не выполняя полного их перебора. Объекты изображаются точками, а отношения между ними – отрезками.

З а д а ч а 3. Три товарища – Иван, Дмитрий и Степан – преподают различные предметы (химию, биологию, физику) в школах Москвы, Ленинграда и Киева. Известно, что: 1) Иван работает не в Москве, а Дмитрий – не в Ленинграде; 2) москвич преподает не физику; 3) тот, кто работает в Ленинграде, преподает химию; 4) Дмитрий преподает не биологию. Какой предмет и в каком городе преподает каждый из товарищей?

Выделим три множества: множество имен, множество учебных предметов, множество городов. Элементы множеств обозначим точками (на рис. 8.4 точкам соответствуют первые буквы имен, предметов, городов). Две точки разных множеств, если они характеризуют признаки людей, соединим штриховой линией. Две точки разных множеств, если они соответствуют признакам одного человека, соединим сплошными линиями. Граф на рис. 8.4 содержит все указанные в задаче элементы множеств и отношения между ними. Задача на языке графов свелась к построению трех треугольников со сплошными сторонами и вершинами в точках разных множеств.

Строим штриховой отрезок *ХД* (рис. 8.5), потому что *Л* соответствует *Х* и *Л* не соответствует *Д*, т.е. *Х* не может соответствовать *Д*.

Используем типичную для таких задач операцию на графе: если у треугольника с вершинами в трех разных множествах одна сторона сплошная, а вторая штриховая, то и третья сторона должна быть штриховой.

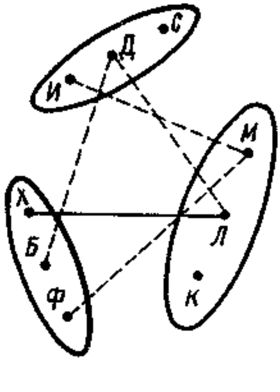


Рис. 8.4

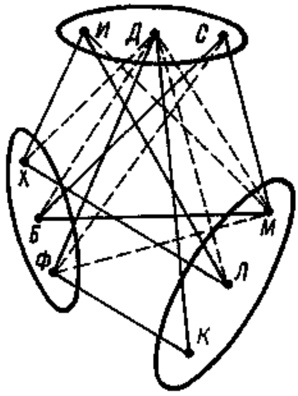


Рис. 8.5

Очевидно, что если какая-либо точка соединена штриховыми отрезками с двумя точками во втором множестве, ее нужно соединить с третьей точкой этого множества сплошным отрезком. Поэтому строим сплошной отрезок *ФД*.

Построим штриховой отрезок *МД*, потому что в треугольнике *ДФМ* сторона *ДФ* сплошная, а *ФМ* штриховая. Строим сплошной отрезок *ДК*, потому что отрезки *ДМ* и *ДЛ* штриховые. Теперь проводим сплошной отрезок *ФК*. Если в треугольнике с вершинами в разных множествах две стороны сплошные, то и третья сторона должна быть сплошной. Таким образом, построен первый сплошной треугольник *ДФК*. Строим сплошные отрезки *МС, ИЛ, ХИ, БМ, БС*.

Вершины сплошных треугольников *ДФК, ЛХИ* и *СМБ* дают ответ на вопрос задачи: Степан преподает биологию в Москве, Иван живет в Ленинграде и преподает химию, Дмитрий преподает физику в Киеве.

8.2. Комбинаторные задачи

Графическая иллюстрация многочисленных операций, с которыми приходится иметь дело при решении различных комбинаторных задач, позволяет сделать поиск решений более обозримым и предостерегает от логических ошибок, облегчает анализ различных комбинаций и раскрашивание изображений различных объектов и отношений между ними по "шахматному принципу".

З а д а ч а 1. В бочке 120 л воды. Кувшин *А* вмещает 7 л, кувшин *В* — 5 л. Как налить в каждый кувшин по 1 л воды (в бочку выливать обратно воду нельзя, но можно выливать ее на землю)?

Наполнив и опорожнив кувшин *А* 14 раз, мы выльем из бочки 98 л и оставим в ней 22 л. Наполнив кувшин *А*, потом из него наполним кувшин *В*. После этого в *А* остается 2 л воды.

Опорожним кувшин *В*, перельем в него 2 л воды из кувшина *А*. Снова наполним кувшин *А* и дольем из него воду в кувшин *В*. После этого в *А* останется 4 л воды.

Выльем всю воду из кувшина *В* и перельем в *В* 4 л воды из кувшина *А*. Наполним *А* и дольем из него кувшин *В*. После этого в *А* останется 6 л воды.

Выльем всю воду из кувшина B. Наполним его из A. После этого в A останется 1 л воды. Опорожним кувшин B и перельем в него оставшийся в бочке 1 л воды. Весь процесс переливания воды из бочки в кувшины, из кувшина A в кувшин B и из кувшинов на землю наглядно показан в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Б	А	В	Б	А	В
22	0	0	8	0	4
15	7	0	1	7	4
15	2	5	1	6	5
15	2	0	1	6	0
15	0	2	1	1	5
8	7	2	1	1	0
8	4	5	0	1	1
8	4	0			

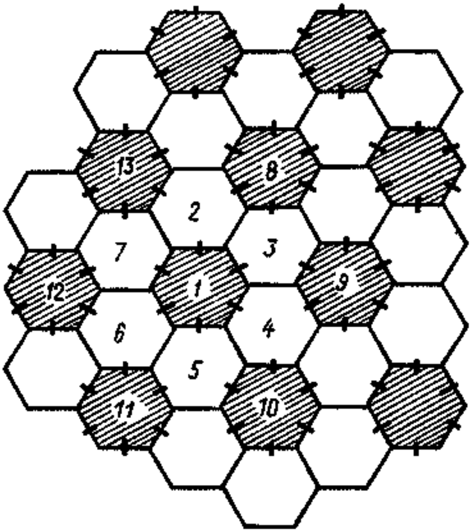


Рис. 8.6

Задача 2. Плоскость разбита на равные "комнаты", имеющие форму правильных шестиугольников. В некоторых стенах проделаны двери так, что для любой вершины, в которой сходятся три стены (стороны шестиугольников), двери имеются только в двух стенах. Доказать, что любой замкнутый путь по такому лабиринту проходит через четное число дверей.

Назовем смежными только те две шестиугольные комнаты, которые имеют общую дверь. Раскрасим комнаты в два цвета так, чтобы смежные комнаты имели разный цвет (рис. 8.6). После этого утверждение задачи становится очевидным, так как любой переход из комнаты одного цвета в комнату того же цвета проходит через комнаты другого цвета.

9. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

9.1. Периодичность тригонометрических функций

Функция f называется периодической, если существует такое число $l \neq 0$ (период f), что при любом значении x из области определения функции f числа $x - l$ и $x + l$ принадлежат области определения функции f и $f(x - l) = f(x) = f(x + l)$.

Наименьший положительный период T периодической функции f называется основным периодом этой функции. Период функции $f(x)$ называется периодом уравнения $f(x) = 0$ и неравенства $f(x) \geqslant 0$ или $f(x) \leqslant 0$.

Общая теория, на основе которой можно было бы находить основной период суммы (произведения) тригонометрических функций, достаточно сложна. Поэтому ограничимся рассмотрением конкретных примеров.

Задача 1. Найти основной период T функции $y = \cos^2 x$.

Так как $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ и основной период функции $y = \cos 2x$ равен π, то и функция $y = \cos^2 x$ имеет $T = \pi$.

Задача 2. Найти основной период T функции

$$y = \cos 3x \cos x. \tag{9.1}$$

Функция $y = \cos 3x$ имеет основной период $2\pi/3$; основной период функции $y = \cos x$ равен 2π. Наименьшее положительное число, которое нацело делится на 2π и на $2\pi/3$, есть 2π. Поэтому 2π – период функции (9.1). Как установить, является ли число 2π основным периодом? Для этого решим уравнение

$$\cos 3x \cos x = 0 \tag{9.2}$$

следующим образом:

$$\cos 3x \cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 3x = 0;\\ \cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x = \pi/2 + k\pi;\\ x = \pi/2 + m\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi/6 + k\pi/3;\\ x = \pi/2 + m\pi.\end{array}\right.$$

Найдем те из полученных решений уравнения (9.2), которые принадлежат $[0;\ 2\pi)$ (рис. 9.1) : $\pi/6$, $\pi/2$, $5\pi/6$, $7\pi/6$, $3\pi/2$, $11\pi/6$. Отсюда ясно, что решения уравнения (9.2), определяемые по формулам $x = \pi/6 + k\pi/3$ и $x = \pi/2 + m\pi$, можно записать одной формулой: $x = \pi/6 + k\pi/3$. Теперь понятно, что основной период T функции $y = \cos x \cos 3x$ равен $k\pi/3$ ($k = 1, 2, 3$ или 6).

Допустим, что $k = 1$. Тогда $T = \pi/3$. Проверим, является ли равенство $\cos 3x \cos x = \cos(3(x + \pi/3))\cos(\pi/3 + x)$ тождеством. При $x = 0$ левая часть этого равенства не равна правой. Понятно, что число $\pi/3$ не является основным периодом функции (9.1). Таким же образом показывается, что и число $2\pi/3$ не есть T функции (9.1).

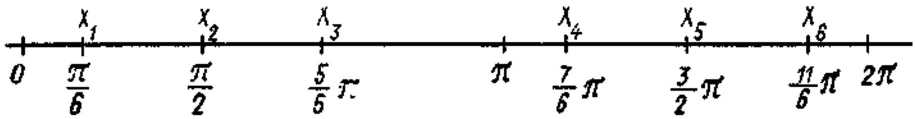


Рис. 9.1

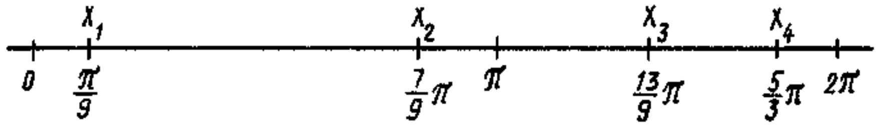


Рис. 9.2

При $k = 3$ $k\pi/3 = \pi$. Очевидно, что $\cos 3x \cos x = \cos(3(x+\pi))\cos(x+\pi)$ есть тождество. Получаем $T = \pi$.

З а д а ч а 3. Найти основной период T функции

$$y = \cos x + \sqrt{3}\sin x - 2\cos 2x. \tag{9.3}$$

Функции $y = \cos x$, $y = \sqrt{3}\sin x$, $y = -2\cos 2x$ имеют основной период соответственно 2π, 2π, π. Поэтому период функции (9.3) равен 2π. Верно ли, что $T = 2\pi$? Решим уравнение

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x - 2\cos 2x = 0 \tag{9.4}$$

следующим образом:

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = \cos x + \operatorname{tg}(\pi/3)\sin x =$$

$$= \frac{\cos(\pi/3)\cos x + \sin(\pi/3)\sin x}{\cos(\pi/3)} = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Уравнение (9.4) заменяем равносильным ему уравнением $\cos(x - \pi/3) - \cos 2x = 0$ и получаем

$$\cos(x - \pi/3) = \cos 2x \Leftrightarrow x - \pi/3 = \pm 2x + 2k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \pi/3 = 2x + 2k\pi; \\ x - \pi/3 = -2x + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\pi/3 - 2k\pi = -\pi/3 + 2k\pi; \\ x = \pi/9 + 2k\pi/3. \end{array}\right.$$

Находим корни уравнения (9.4), принадлежащие $[0; 2\pi)$ (рис. 9.2) : $x_1 = \pi/9$, $x_2 = 7\pi/9$, $x_3 = 13\pi/9$, $x_4 = 5\pi/3$. Теперь ясно, что $T \neq \pi$, $T \neq 2\pi/3$. Итак, $T = 2\pi$.

З а д а ч а 4. Решить уравнение

$$\sin 2x \sin 7x = 1. \tag{9.5}$$

Основные периоды функций $y = \sin 2x$ и $y = \sin 7x$ равны соответственно π и $2\pi/7$. Поэтому период уравнения (9.5) равен 2π. Очевидно, что

$$\sin 2x \sin 7x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\sin 2x = 1;\\ \sin 7x = 1;\end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l}\sin 2x = -1;\\ \sin 7x = -1\end{array}\right\} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}2x = \pi/2 + 2\pi m;\\ 7x = \pi/2 + 2\pi k;\end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l}2x = -\pi/2 + 2\pi m;\\ 7x = -\pi/2 + 2\pi p\end{array}\right\} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l}x = \pi/4 + \pi n;\\ x = \pi/14 + 2\pi k/7;\end{array}\right\} & (9.6) \\ \left.\begin{array}{l}x = -\pi/4 + \pi m;\\ x = -\pi/14 + 2\pi p/7\end{array}\right\} & (9.7) \end{array}\right.$$

(n, k, p — целые числа).

Выпишем числа, определяемые системой уравнений (9.6) и принадлежащие $[0;\ 2\pi)$: $\left\{\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4}\right\}$; $\left\{\dfrac{\pi}{14},\ \dfrac{5\pi}{14},\ \dfrac{9\pi}{14},\ \dfrac{13\pi}{14},\ \dfrac{17\pi}{14},\ \dfrac{21\pi}{14},\ \dfrac{25\pi}{14}\right\}$.

Пересечение этих множеств пусто, поэтому система уравнений (9.6) решений не имеет.

Числа, определяемые системой уравнений (9.7) и принадлежащие $[0;\ 2\pi)$:
$\left\{\dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}\right\}$; $\left\{\dfrac{3\pi}{14},\ \dfrac{7\pi}{14},\ \dfrac{11\pi}{14},\ \dfrac{15\pi}{14},\ \dfrac{19\pi}{14},\ \dfrac{23\pi}{14},\ \dfrac{27\pi}{14}\right\}$.

Пересечение этих множеств пусто, поэтому система уравнений (9.7) решений не имеет. Итак, уравнение (9.5) решений не имеет.

Задача 5. Решить неравенство

$$\cos(x/2) - \cos(x/3) < 2. \qquad (9.8)$$

Основные периоды функций $y = \cos(x/2)$ и $y = \cos(x/3)$ равны соответственно 4π и 6π, поэтому период данного неравенства равен 12π.

Решаем уравнение, соответствующее неравенству (9.8):

$$\cos(x/2) - \cos(x/3) = 2 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x/2 = 2k\pi;\\ x/3 = \pi + 2\pi n\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\cos(x/2) = 1;\\ \cos(x/3) = -1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{lr} x = 4k\pi; & (9.9)\\ x = 3\pi + 6\pi n. & (9.10)\end{array}$$

Выписываем корни уравнений (9.9) и (9.10), принадлежащие $[0;\ 12\pi)$: $\{0,\ 4\pi,\ 8\pi\}$ и $\{3\pi,\ 9\pi\}$. Пересечение этих множеств пусто, поэтому уравнение $\cos(x/2) - \cos(x/3) = 2$ решений не имеет. Так как $\cos(x/2) \neq 1$ и $\cos(x/3) \neq -1$, решениями неравенства (9.8) являются все действительные числа.

Задача 6. Решить уравнение

$$\sin x + \cos x = 1. \qquad (9.11)$$

Возведем обе части уравнения в квадрат (в результате этого полученное уравнение может и не быть равносильным данному):

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1;\ 2\sin x\cos x = 0;\ \sin 2x = 0;$$

$$2x = k\pi;\ x = k\pi/2.$$

Функция $y = \sin x + \cos x$ имеет период 2π. Выписываем числа, определяемые равенством $x = k\pi/2$ и принадлежащие $[0;\ 2\pi) : 0;\ \pi/2;\ \pi;\ 3\pi/2$. В результате подстановки этих чисел в уравнение (9.11) убеждаемся, что только числа 0 и $\pi/2$ являются его корнями, принадлежащими $[0;\ 2\pi)$.

Ответ. $x_1 = 0 + 2\pi n = 2\pi n;\ x_2 = \pi/2 + 2\pi m$.

З а д а ч а 7. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}5x + \operatorname{tg}3x = 0. \qquad (9.12)$$

Функция $y = \operatorname{tg}x$ не определена в точках $\pi/2 + k\pi$, поэтому $y = \operatorname{tg}5x$ не определена в точках $\pi/10 + \pi n/5$, а функция $y = \operatorname{tg}3x$ не определена в точках $\pi/6 + k\pi/3$. Уравнение (9.12) имеет основной период π. Выписываем числа, принадлежащие $[0;\ \pi)$, в которых не определена функция $y = \operatorname{tg}5x + \operatorname{tg}3x$:

$$\left\{\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right\}. \qquad (9.13)$$

Преобразуем уравнение (9.12) к виду $\operatorname{tg}5x = -\operatorname{tg}3x$, $\operatorname{tg}5x = \operatorname{tg}(-3x)$. Отсюда $5x = -3x + \pi m$,

$$x = \pi m/8. \qquad (9.14)$$

Выписываем числа, определяемые равенством (9.14) и принадлежащие $(0;\ \pi)$: $\left\{0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}\right\}$.

Число $\pi/2$ не является корнем уравнения (9.12), потому что оно принадлежит множеству (9.13).

Ответ. $m\pi/8 + k\pi$ $(m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

9.2. Основные тригонометрические уравнения и неравенства

Простейшими тригонометрическими уравнениями являются:

$$\sin x = a,\ |a| \leqslant 1;\ \cos x = a,\ |a| \leqslant 1;\ \operatorname{tg}x = a;\ \operatorname{ctg}x = a.$$

Решение всякого тригонометрического уравнения сводится к определению корней уравнения вида: $\sin kx = m$, $\cos kx = m$, $\operatorname{tg}kx = m$, $\operatorname{ctg}kx = m$.

Простейшие неравенства: $\sin x \gtreqless a$, $\cos x \gtreqless a$, $\operatorname{ctg}x \gtreqless a$, $\operatorname{tg}x \gtreqless a$. Основным аппаратом, с помощью которого решаются тригонометрические уравнения и неравенства, являются формулы тригонометрических функций и их графики.

З а д а ч а 1. Решить неравенство

$$\sin x \geqslant 0{,}5. \qquad (9.15)$$

Функция $y = \sin x$ имеет основной период 2π. Строим графики функций $y = \sin x$ и $y = 1/2$ на $[0;\ 2\pi)$ (рис. 9.3). Так как функция $y = \sin x$ непрерывна и на $[0;\ \pi/2]$ возрастающая, а на $[\pi/2;\ \pi]$ убывающая, уравнение $\sin x = 1/2$ имеет один корень на $[0;\ \pi/2]$ и один корень на $[\pi/2;\ \pi]$: $x_1 = \pi/6$, $x_2 = \pi - \pi/6$.

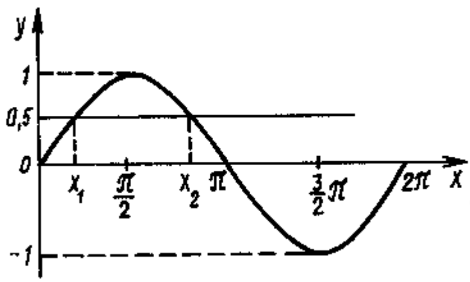


Рис. 9.3

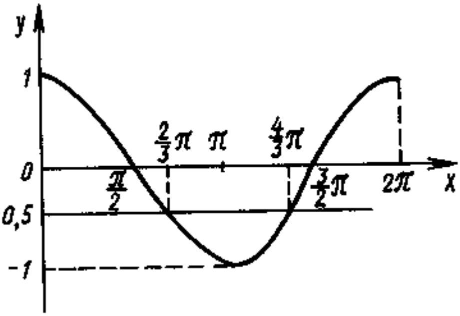


Рис. 9.4

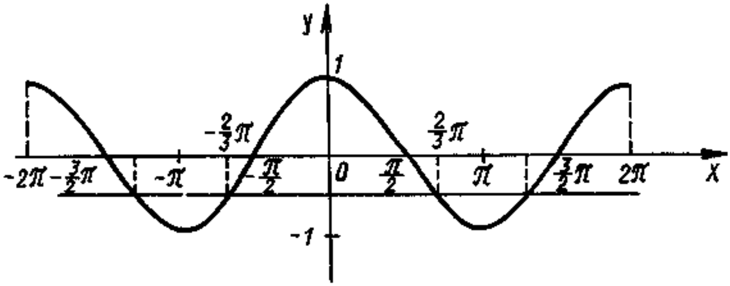


Рис. 9.5

Функция $y = \sin x$ имеет основной период, равный 2π, поэтому все корни уравнения $\sin x = 1/2$ задаются формулами: $x = \pi/6 + 2\pi n$, $x = -\pi/6 + \pi + 2k\pi$. Эти формулы объединяются в одну: $x = (-1)^m \pi/6 + \pi m$.

Из рис. 9.3 видно, что решение неравенства $\sin x > 1/2$ на $[0;\ 2\pi)$ есть интервал $(x_1;\ x_2)$, т.е. $(\pi/6;\ 5\pi/6)$.

Так как функция $y = \sin x$ имеет период 2π, решением неравенства $\sin x > 1/2$ являются $(\pi/6 + 2\pi n;\ 5\pi/6 + 2\pi n)$, где n — любое целое число.

Итак, $\sin x \geqslant 1/2 \Leftrightarrow \pi/6 + 2\pi n \leqslant x \leqslant 5\pi/6 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{N}$.

З а д а ч а 2. Решить неравенство $\cos x \geqslant -1/2$.

Функция $y = \cos x$ имеет период 2π . Строим ее график и график функции $y = -1/2$ на $[0;\ 2\pi)$ (рис. 9.4). Очевидно, что $\cos(2\pi/3) = \cos(4\pi/3) = -1/2$. Итак, на $[0;\ 2\pi)$ уравнение $\cos x = -1/2$ имеет решения: $x_1 = 2\pi/3$, $x_2 = 4\pi/3$.

Функция $y = \cos x$ имеет период 2π, поэтому все решения уравнения $\cos x = -1/2$ определяются формулами: $x = 2\pi/3 + 2\pi n$ и $x = 4\pi/3 + 2\pi m$. Так как $4\pi/3 + 2\pi m = -2\pi/3 + 2\pi + 2\pi m = -2\pi/3 + 2\pi(m+1)$, решения уравнения $\cos x = -1/2$ можно записать так: $x \pm 2\pi/3 + 2k\pi$.

Из рис. 9.4 видно, что решениями неравенства $\cos x \geqslant -1/2$, принадлежащими $[0;\ 2\pi)$, являются отрезки $[0;\ 2\pi/3]$ и $[4\pi/3;\ 2\pi]$. Поэтому решение этого неравенства есть множество $[2k\pi;\ 2\pi/3 + 2k\pi] \cup [4\pi/3 + 2k\pi;\ 2\pi + 2k\pi)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Из рис. 9.5 видно, что все решения неравенства $\cos x \geqslant -1/2$ можно записать короче: $[-2\pi/3 + 2k\pi;\ 2\pi/3 + 2k\pi]$.

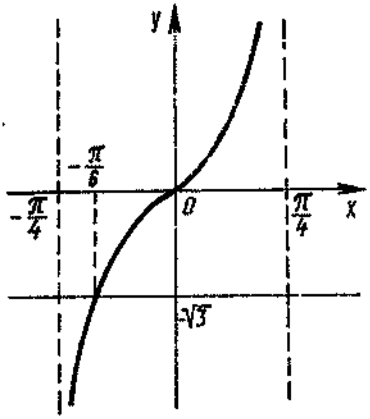


Рис. 9.6

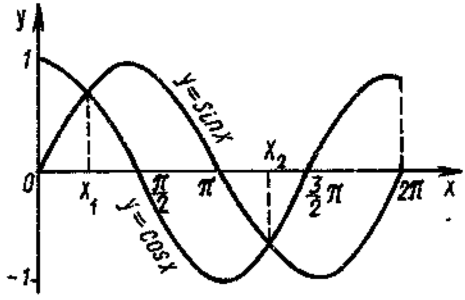


Рис. 9.7

З а д а ч а 3. Решить неравенство

$$\mathrm{tg}\,2x < -\sqrt{3}. \qquad (9.16)$$

Функция $y = \mathrm{tg}\,2x$ имеет период, равный $\pi/2$. Строим на интервале $(-\pi/4;\ \pi/4)$ графики функций $y = \mathrm{tg}\,2x$ и $y = -\sqrt{3}$ (рис. 9.6). Решаем уравнение $\mathrm{tg}\,2x = -\sqrt{3}$:

$$2x = \mathrm{arctg}\,(-\sqrt{3}) + \pi n = -\pi/3 + \pi n;\ x = -\pi/6 + \pi n/2.$$

На интервале $(-\pi/4;\ \pi/4)$ уравнение $\mathrm{tg}\,2x = \sqrt{3}$ имеет только один корень: $-\pi/6$. Решения неравенства (9.16), принадлежащие интервалу $(-\pi/4; \pi/4)$, составляют интервал $(-\pi/4;\ -\pi/6)$. Все его решения образуют $(-\pi/4 + \pi n/2;\ -\pi/6 + \pi n/2)$.

З а д а ч а 4. Решить неравенство

$$\sin x < \cos x. \qquad (9.17)$$

Построим графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ на $[0;\ 2\pi)$ (рис. 9.7). Уравнение $\sin x = \cos x$ на $[0;\ 2\pi)$ имеет корни $x_1 = \pi/4$ и $x_2 = 5\pi/4$. Теперь ясно, что на $[0;\ 2\pi)$ решениями неравенства (9.17) являются точки множества $[0;\ \pi/4) \cup (5\pi/4;\ 2\pi)$.

Ответ. $(2k\pi;\ \pi/4 + 2k\pi) \cup (5\pi/4 + 2k\pi;\ 2\pi + 2k\pi)$.

З а д а ч а 5. Решить неравенство

$$-\sqrt{3} < \mathrm{ctg}\,(x/3) < 1. \qquad (9.18)$$

Функция $y = \mathrm{ctg}\,(x/3)$ имеет период 3π. Строим на $(0;\ 3\pi)$ графики функций $y = \mathrm{ctg}\,(x/3)$, $y = -\sqrt{3}$, $y = 1$ (рис. 9.8). Решением неравенства (9.18) на $(0;\ 3\pi)$ является промежуток $(x_1;\ x_2)$, где x_2 и x_1 — корни уравнений $\mathrm{ctg}\,(x/3) = -\sqrt{3}$ и $\mathrm{ctg}\,(x/3) = 1$, принадлежащие $(0;\ 3\pi)$. Решаем уравнение $\mathrm{ctg}\,(x/3) = -\sqrt{3}$:

$$x/3 = \mathrm{arctg}\,(-\sqrt{3}) = 2\pi/3;\ x_2 = 2\pi.$$

Очевидно, что $x_1 = 3\pi/4$.

Ответ. $(3\pi/4 + 3k\pi;\ 2\pi + 3k\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

З а д а ч а 6. Решить уравнение $\sin x = \cos 2x$. Очевидно, что $\sin x = \cos 2x \Leftrightarrow \cos(\pi/2 - x) = \cos 2x$. Поэтому $1/2 - x = \pm 2x + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Отсюда $x_1 = \pi/6 - 2k\pi/3, x_2 = 2k\pi - \pi/2, k \in \mathbf{Z}$.

Из предпоследнего равенства следует, что промежутку $[0; 2\pi)$ принадлежат корни $\pi/6$, $5\pi/6$, $3\pi/2$. Из последнего равенства следует, что этому же промежутку принадлежит только $1{,}5\pi$.

Ответ. $x = \pi/6 - 2k\pi/3, k \in \mathbf{Z}$.

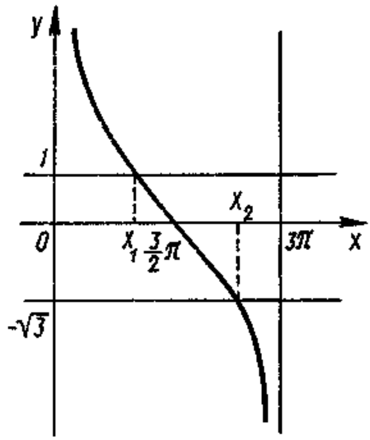


Рис. 9.8

9.3. Преобразование произведения тригонометрических функций в их сумму

При тождественном преобразовании произведения тригонометрических функций в сумму (и наоборот) применяются тождества:

$$\sin\alpha \sin\beta = 0{,}5(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$
$$\cos\alpha \cos\beta = 0{,}5(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta));$$
$$\sin\alpha \cos\beta = 0{,}5(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta));$$
$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2};$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

З а д а ч а 1. Решить неравенство

$$\sin x \sin 7x \geqslant \sin 3x \sin 5x. \tag{9.19}$$

Неравенство (9.19) заменяем равносильным ему

$$\frac{\cos 6x - \cos 8x}{8} \geqslant \frac{\cos 2x - \cos 8x}{2}$$

или

$$\cos 6x \geqslant \cos 2x. \tag{9.20}$$

Функция $y = \cos 2x$ имеет период, равный π, функция $y = \cos 6x$ имеет T, равный $\pi/3$. Поэтому неравенство (9.20) имеет период π. Строим графики функций $y = \cos 2x$ и $y = \cos 6x$ на $[0; \pi)$ (рис. 9.9). На $[0; \pi)$ уравнение $\cos 6x = \cos 2x$ имеет корни: $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$, а неравенство (9.20) – $[\pi/4;$

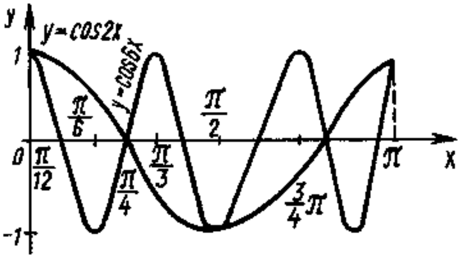


Рис. 9.9

$3\pi/4]$. Все решения неравенства (9.20) образуют множество $[\pi/4 + k\pi;\ 3\pi/4 + k\pi]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Корни уравнения $\cos 6x = \cos 2x$ находятся следующим образом: $\cos 6x = \cos 2x \Leftrightarrow 6x = \pm 2x + 2k\pi$. Отсюда $x_1 = k\pi/4$, $x_2 = k\pi/2$.

З а д а ч а 2. Решить неравенство

$$\sin 3x \geqslant 4 \sin x \cos 2x\,. \qquad (9.21)$$

Получаем

$$4 \sin x \cos 2x = 2\sin(x - 2x) + 2\sin 3x = 2\sin 3x - 2\sin x\,,$$

поэтому

$$\sin 3x \geqslant 4\sin x\cos 2x \Leftrightarrow \sin 3x \geqslant 2\sin 3x - 2\sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x - 2\sin x \leqslant 0 \Leftrightarrow (\sin 3x - \sin x) - \sin x \leqslant 0\,.$$

Получаем $\sin 3x - \sin x = 2\cos 2x \sin x$, поэтому неравенство (9.21) равносильно неравенству $2\cos 2x \sin x - \sin x \leqslant 0$. Отсюда

$$\sin x\ (2\cos 2x - 1) \leqslant 0; \qquad (9.22)$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n\,;$$

$$2\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 1/2 \Leftrightarrow 2x = \pm \pi/3 + 2k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \pi/6 + k\pi\,.$$

Так как неравенство (9.22) имеет период, равный 2π, на $[0;\ 2\pi)$ уравнение $\sin x = 0$ имеет корни 0 и π, а уравнение $2\cos 2x - 1 = 0$ – корни $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$. Итак, уравнение $\sin x\ (2\cos 2x - 1) = 0$ на полуинтервале $[0;\ 2\pi)$ имеет корни $0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ (рис. 9.10).

Функция $y = \sin x\ (2\cos 2x - 1)$ непрерывна, поэтому, применив метод интервалов, найдем решения неравенства (9.21), принадлежащие $[0;\ 2\pi)$:

$$\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\pi,\ \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6};\ 2\pi\right].$$

Ответ. $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right] \cup \left[\pi + 2k\pi;\ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right) \cup \left[\frac{11\pi}{6} + 2k\pi;\ 2\pi + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

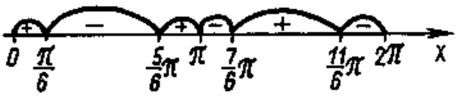


Рис. 9.10

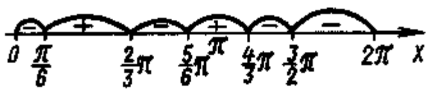


Рис. 9.11

З а д а ч а 3. Решить неравенство

$$\sin x + \sin 2x + 2\sin x \sin 2x - 2\cos x - \cos 2x \geqslant 0. \qquad (9.23)$$

Обозначим левую часть данного неравенства $f(x)$ и преобразуем ее:

$$f(x) = (\sin x + \sin 2x) - (\cos x + \cos 3x) - \cos 2x =$$
$$= (\sin x + 2\sin x\cos x) - 2\cos 2x\cos x - \cos 2x =$$
$$= \sin x\,(1 + 2\cos x) - \cos 2x\,(2\cos x + 1) =$$
$$= (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos 2x) = (1 + 2\cos x)(\cos(\pi/2 - x) -$$
$$- \cos 2x).$$

Решим уравнения

$$1 + 2\cos x = 0; \qquad (9.24)$$
$$\cos(\pi/2 - x) - \cos 2x = 0: \qquad (9.25)$$
$$1 + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1/2 \Leftrightarrow x = \pm 2\pi/3 + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z};$$
$$\cos(\pi/2 - x) - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos(\pi/2 - x) =$$
$$= \cos 2x \Leftrightarrow \pi/2 - x = \pm 2x + 2k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\pi/2 + 2k\pi; \\ x = \pi/6 - 2k\pi/3,\ k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Неравенство (9.23) имеет период 2π. Выписываем корни уравнений (9.24) и (9.25), принадлежащие промежутку $[0;\ 2\pi)$: $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ (рис. 9.11).

Применив метод интервалов к непрерывной функции $f(x) = (1 + 2\cos x) \times \times (\sin x - \cos 2x)$, установим ее знаки на отдельных частях промежутка $[0;\ 2\pi)$: 1) $f(0) < 0$ и на $[0;\ \frac{\pi}{6})$ $f(x) < 0$; 2) $f(\frac{\pi}{2}) > 0$ и на $(\frac{\pi}{6};\ \frac{2\pi}{3})$ $f(x) > 0$; 3) $f(\frac{3\pi}{4}) < 0$ и на $(\frac{2\pi}{3};\ \frac{5\pi}{6})$ $f(x) < 0$; 4) $f(\pi) > 0$ и на $(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi]$ $f(x) > 0$, и т.д.

Ответ. $[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi] \cup [\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi],\ k \in \mathbf{Z}.$

9.4. Преобразование выражения $a\sin x + b\cos x$

Покажем, что при любых значениях параметров a и b выражение $a\sin x + b\cos x$ можно привести к виду $c\sin(x + \varphi)$:

$$a\sin x + b\cos x = a\left(\sin x + \frac{b}{a}\cos x\right),\ a \neq 0.$$

Обозначим $b/a = \mathrm{tg}\,\varphi$. Тогда

$$a\sin x + b\cos x = a(\sin x + \mathrm{tg}\varphi\cos x) =$$

$$= \frac{a}{\cos\varphi}(\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi) = \frac{a}{\cos\varphi}\sin(x+\varphi).$$

З а д а ч а 1. Решить уравнение $3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$.

Преобразуем левую часть уравнения следующим образом:

$$3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 3\left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{3}\cos x\right) =$$

$$= 3\left(\sin x + \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6}\cos x\right) = \frac{3}{\cos(\pi/6)}\left(\sin x\cos x\,\frac{\pi}{6} +\right.$$

$$\left.+ \cos x\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Таким образом, данное уравнение равносильно уравнению $2\sqrt{3}\sin(x + \pi/6) = 1$. Отсюда $\sin(x + \pi/6) = \sqrt{3}/6$, $x + \pi/6 = (-1)^m \arcsin(\sqrt{3}/6) + n\pi$, $x = -\pi/6 + (-1)^n \arcsin(\sqrt{3}/6) + n\pi$.

9.5. Преобразование тригонометрического уравнения к виду $a_0y^n + a_1y^{n-1} + ... + a_n = 0$

Сущность метода раскрывается в процессе решения приведенных ниже задач.

З а д а ч а 1. Решить уравнение

$$\sin 2x = \cos 2x - \sin^2 x + 1. \tag{9.26}$$

Преобразуем уравнение (9.26):

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0. \tag{9.27}$$

Разделим обе части уравнения (9.27) на $\cos^2 x$. Корни уравнения $\cos^2 x = 0$ не являются корнями уравнения (9.27), так как уравнения $\cos^2 x = 0$ и $\sin^2 x = 0$ неравносильны. В результате получаем уравнение, равносильное уравнению (9.27): $\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg}x - 2 = 0$. Обозначив $\mathrm{tg}x = t$, получим $t^2 + 2t - 2 = 0$. Решения этого уравнения: $t_1 = -1 - \sqrt{3}$, $t_2 = -1 + \sqrt{3}$. Итак, $\mathrm{tg}x = -1 - \sqrt{3}$ или $\mathrm{tg}x = -1 + \sqrt{3}$.

Ответ. $x_1 = \mathrm{arctg}(-1 - \sqrt{3}) + k\pi$; $x_2 = \mathrm{arctg}(-1 + \sqrt{3}) + n\pi$.

З а д а ч а 2. Решить уравнение

$$4\sin 2x = 5 - 3\cos 2x. \tag{9.28}$$

После возведения обеих частей уравнения в квадрат имеем $16\sin^2 2x = 25 - 30\cos 2x + 9\cos^2 2x$ или $16(1 - \cos^2 2x) = 25 - 30\cos 2x + 9\cos^2 2x$.

Обозначив $\cos 2x = y$, получим $16(1-y^2) = 25 - 30y + 9y^2$. Решив это уравнение, найдем $y = \cos 2x = 0{,}6$. Отсюда $x = \pm 0{,}5 \arccos(3/5) + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Но такое решение нуждается в проверке, так как при возведении в квадрат могли появиться посторонние корни. В самом деле, правая часть уравнения (9.28) при всех значениях x положительная, потому что $\cos x \leqslant 1$. Левая часть его может быть и положительной и отрицательной. Так как $\arccos(3/5)$ — острый угол, то $\sin(\arccos(3/5)) > 0$, а $\sin(-\arccos(3/5)) < 0$. Поэтому решением уравнения (9.28) будут только $x = 0{,}5\arccos(3/5) + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

9.6. Разложение тригонометрического выражения на множители

С помощью тождественных преобразований тригонометрическое уравнение $f(kx) = 0$ приводится к виду $f_1(k_1x)\, f_2(k_2x) = 0$. Если функции $f_1(k_1x)$ и $f_2(k_2x)$ определены на множестве M, то на этом множестве данное уравнение равносильно дизъюнкции уравнений $f_1(k_1x) = 0$, $f_2(k_2x) = 0$.

Задача 1. Решить уравнение

$$4\sin x + 2\cos x = 2 + 3\operatorname{tg} x. \qquad (9.29)$$

Уравнение (9.29) имеет период 2π. Построим графики функций $f(x) = 4\sin x + 2\cos x$, $\varphi(x) = 2 + 3\operatorname{tg} x$ на $[0;\ 2\pi)$ (рис. 9.12). На $[0;\ 2\pi)$ уравнение (9.29) имеет четыре корня, в том числе $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/6$, $x_3 = 5\pi/6$ (в этом убеждаемся при подстановке чисел в уравнение). Но как найти точное значение четвертого корня из $[0;\ 2\pi)$?

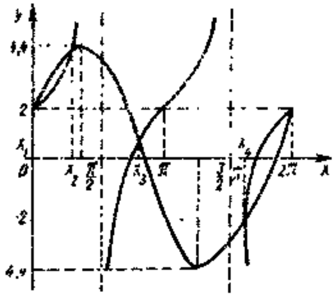


Рис. 9.12

Заменим уравнение (9.29) равносильным ему уравнением

$$4\cos x \sin x + 2\cos^2 x - 2\cos x - 3\sin x = 0. \qquad (9.30)$$

Так как числа 0 и $\pi/6$ есть корни уравнения (9.30), левая часть его должна содержать множители $\sin x$ и $\sin x - 0{,}5$. В самом деле, после преобразования уравнения (9.30)

$$\pm 4\sin x\sqrt{1-\sin^2 x} + 2(1-\sin^2 x) \mp 2\sqrt{1-\sin^2 x} - 3\sin x = 0;$$

$$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}\,(4\sin x - 2) = 3\sin x + 2\sin^2 x - 2$$

и возведения обеих его частей в квадрат получаем

$$\sin x\ (20\sin^3 x - 4\sin^2 x - 11\sin x + 4) = 0.$$

Далее,

$$\frac{20\sin^3 x - 4\sin^2 x - 11\sin x + 4}{\sin x - 0{,}5} = 20\sin^2 x + 6\sin x - 8.$$

Итак, корень x_4 уравнения (9.29), принадлежащий $[0;\ 2\pi)$, найдем, решив уравнение $20\sin^2 x + 6\sin x - 8 = 0$. Получаем $\sin x = 1/2$ или $\sin x = -4/5$. Очевидно, что $\sin x_4 = -4/5$ и $x_4 = -\arcsin(4/5) + 2\pi$.

Ответ. $2k\pi$; $\pi/6 + 2m\pi$; $5\pi/6 + 2p\pi$; $-\arcsin(4/5) + 2\pi + 2n\pi$.

9.7. Понижение степени тригонометрических функций

Понижение степени тригонометрических функций производится с помощью следующих формул:

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha;\ 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha;$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha;\ \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha;$$

$$3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \sin 3\alpha;\ 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos 3\alpha;$$

$$8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1 = \cos 4\alpha;$$

$$8\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin\alpha = \sin 4\alpha.$$

Задача 1. Решить уравнение

$$\cos^6 x + \sin^6 x = 4\sin^2 2x. \tag{9.31}$$

Получаем:

$$\cos^6 x = (\cos^2 x)^3 = (0{,}5(1 + \cos 2x))^3;$$

$$\sin^6 x = (\sin^2 x)^3 = (0{,}5(1 - \cos 2x))^3;$$

$$\cos^6 x + \sin^6 x = 0{,}25(1 + 3\cos^2 2x) = 0{,}125(5 + 3\cos 4x).$$

Наконец, $4\sin^2 2x = 2(1 - \cos 4x)$.

Таким образом, уравнение (9.31) в результате понижения степени тригонометрических функций примет вид $0{,}125(5 + 3\cos 4x) = 2(1 - \cos 4x)$. Отсюда $\cos 4x = \dfrac{11}{19}$, $x = \pm\dfrac{1}{4}\arccos\dfrac{11}{19} + 0{,}5k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

9.8. Применение универсальной подстановки

Способ решения тригонометрических уравнений основывается на формулах:

$$\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} / \left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right);\ \cos\alpha = \left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right) / \left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$\sin\alpha = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} / \left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

Универсальность формул заключается в том, что $\sin\alpha, \cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ выражается через $\operatorname{tg}(\alpha/2)$.

Задача 1. Решить уравнение $\sin x - \cos x = 1$.

Применив универсальные подстановки, получим

$$\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}(x/2)} - \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = 1, \quad \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

Отсюда $\operatorname{tg}(x/2) = 1$ и $x = \pi/2 + 2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm 2, \ldots$ Вместе с тем очевидно, что $x = \pi + 2n\pi$ также является решением этого уравнения.

Ответ. $\pi/2 + 2k\pi$; $\pi(1+2n)$, $k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Задача 2. Решить уравнение

$$\sin x + \cos x - \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}.$$

Применив универсальные подстановки и обозначив $\operatorname{tg}(x/2) = t$, получим

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1-t^2} - \frac{1-t^2}{2t} = \frac{1+t^2}{1-t^2} + \frac{1+t^2}{2t}.$$

Отсюда $3t^4 + 4t^3 + 1 = 0$. Очевидно, что число -1 есть корень этого уравнения. Поэтому его можно записать так: $(t+1)(3t^3 + t^2 - t + 1) = 0$. Число -1 есть корень уравнения $3t^3 + t^2 - t + 1 = 0$. Итак, данное уравнение приводится к виду $(t+1)^2(3t^2 - 2t + 1) = 0$.

Квадратный трехчлен не имеет действительных корней. Поэтому $t = -1$, т.е. $x = -\pi/2 + 2n\pi$. Полученные значения x не являются решениями данного уравнения.

Ответ. Данное уравнение решений не имеет.

9.9. Системы тригонометрических уравнений

Под системой тригонометрических уравнений понимают такие системы уравнений, в которые входят или только тригонометрические уравнения, или тригонометрические и алгебраические.

Система тригонометрических уравнений может быть сведена к одному уравнению с одной переменной, если удается выразить в явном виде одно неизвестное через другое. Отдельные системы тригонометрических уравнений можно свести к алгебраическим системам в результате тождественных преобразований тригонометрических выражений.

Задача 1. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} y; \\ &x - y = \pi/6. \end{aligned}\right\}$$

Очевидно, что $y = x - \pi/6$ и

$$\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right). \tag{9.32}$$

Так как

$$\frac{1-\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}x} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right),\ \mathrm{tg}x \neq -1;$$

$$x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi,$$

то из уравнения (9.32) получаем $\mathrm{tg}(\pi/4 - x) = \mathrm{tg}(x - \pi/6)$. Отсюда $\pi/4 - x = (x - \pi/6) + k\pi$ и $x = 5\pi/24 - k\pi/2$.

Ответ. $\left(\frac{5\pi}{24} - \frac{k\pi}{2};\ \frac{\pi}{24} - \frac{k\pi}{2}\right),\ k \in \mathbf{Z}$.

З а д а ч а 2. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \sin x \cos y = a; \\ x + y = b. \end{array}\right\}$$

Необходимым условием существования решений этой системы является существование решения неравенства $|a| \leqslant 1$. Далее, $y = b - x$. Поэтому $\sin x \cos(b - x) = a \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin(2x - b) + \sin b) = a \Leftrightarrow \sin(2x - b) = 2a - \sin b$. Последнее уравнение имеет решение, если $|2a - \sin b| \leqslant 1$. Итак,

$$\left.\begin{array}{l} \sin x \cos y = a; \\ y = b - x; \\ |a| \leqslant 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \sin(2x - b) = 2a - \sin b; \\ y = b - x; \\ |a| \leqslant 1; \\ |2a - \sin b| \leqslant 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - b = (-1)^k \arcsin(2a - \sin b) + k\pi; \\ y = b - x; \\ |a| \leqslant 1; \\ |2a - \sin b| \leqslant 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(b + (-1)^k \arcsin(2a - \sin b) + k\pi); \\ y = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin(2a - \sin b) - k\pi/2; \\ |a| \leqslant 1; \\ |2a - \sin b| \leqslant 1 \end{array}\right\}$$

для $k \in \mathbf{Z}$.

З а д а ч а 3. При каких значениях параметра a система уравнений

$$y = \sin(a + \pi x) + \sin(a - \pi x); \tag{9.33}$$

$$3\sin a = \frac{1}{1+y^2}\left(\frac{3}{2} + x + \frac{1}{2x^2}\right) \tag{9.34}$$

имеет единственное решение в области $x \in [1;\ 1{,}5]$, $y \in (-\infty,\ 0]$?

Уравнение (9.33) приводится к виду

$$y = 2\sin a \cos \pi x. \tag{9.35}$$

По условию задачи $1 \leqslant x \leqslant 1{,}5$, поэтому

$$-1 \leqslant \cos \pi x \leqslant 0. \tag{9.36}$$

По условию задачи $y \leqslant 0$, поэтому из уравнений (9.35) и (9.36) следует, что

$$\sin a \geqslant 0. \tag{9.37}$$

Из уравнений (9.34) и (9.35) получаем

$$3\sin a\,(1 + 4\sin^2 a \cos^2 \pi x) = 1{,}5 + x + 0{,}5x^{-2}.$$

Обозначим

$$\varphi(x) = 3\sin a\,(1 + 4\sin^2 a \cos^2 \pi x);$$

$$f(x) = 1{,}5 + x + 0{,}5x^{-2}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 1{,}5.$$

Очевидно, что $f'(x) = 1 - x^{-3}$ и $f'(1) = 0$. Это означает, что функция $f(x)$ на $(1;\ 1{,}5)$ монотонная. Так как $f(1) = 3$ и $f\left(\frac{3}{2}\right) = 3\frac{2}{9}$, то непрерывная функция $f(x)$ на $(1;\ 1{,}5)$ монотонно возрастает.

Функция $y = \cos \pi x$ на $(1;\ 1{,}5)$ отрицательная и монотонно возрастающая. Поэтому функция $\varphi(x)$ на $(1;\ 1{,}5)$ неотрицательная и убывающая.

Так как $\varphi(1) = 3\sin a\,(1 + 4\sin^2 a)$ и $\varphi(3/2) = 3\sin a < 3\frac{2}{9}$, то графики монотонных и непрерывных функций φ и f пересекаются только в одной точке $x \in [1;\ 1{,}5]$, если

$$\left.\begin{aligned} &3\sin a\,(1 + 4\sin^2 a) \geqslant 3; \\ &\sin a \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.38}$$

Функция $y = \sin a\,(1 + 4\sin^2 a)$ монотонная относительно $\sin a$ ($\sin a \geqslant 0$). Поэтому из условия (9.39) следует, что

$$\sin a \geqslant 1/2. \tag{9.39}$$

Решив неравенство (9.39), получаем ответ:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant a \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

9.10. Основные уравнения и неравенства, содержащие $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$

Функция $y = \arcsin x$ определена на $(-1;\ 1)$, $-\pi/2 \leqslant \arcsin x \leqslant \pi/2$ и $\sin(\arcsin x) = x$. Функция $y = \arccos x$ определена на $[-1;\ 1]$, $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$ и $\cos(\arccos x) = x$. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ определена на $(-\infty;\ +\infty)$, $-\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2$ и $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ определена на $(-\infty;\ +\infty)$, $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$.

З а д а ч а 1. Найти $\sin(\arccos(3/4))$.

Так как $0 \leqslant \arccos(3/4) \leqslant \pi/2$, то $0 \leqslant \sin(\arccos(3/4)) \leqslant 1$. Поэтому $\sin x$

$\times$ (arccos (3/4)) $= \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(3/4))} = \sqrt{1 - 0{,}75^2} = 0{,}25\sqrt{7}.$

Задача 2. Найти tg (arccos (2/3)).

Так как $0 < \arccos(2/3) < \pi/2$, то $\operatorname{tg}(\arccos(2/3)) > 0$. Поэтому

$$\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{2}{3}\right) = \frac{\sin(\arccos(2/3))}{\cos(\arccos(2/3))} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(2/3))}}{2/3} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Задача 3. Найти sin (arctg (−2)).

Так как $-\pi/2 < \operatorname{arctg}(-2) < 0$, то $-1 < \sin(\operatorname{arctg}(-2)) < 0$. Применив формулу $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}$, получим

$$\sin(\operatorname{arctg}(-2)) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-2))}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(-2))}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Задача 4. Решить уравнение $3\arcsin\sqrt{x} - \pi = 0$.

Так как $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то $0 \leqslant x \leqslant 1$. Далее, $\arcsin\sqrt{x} = \pi/3$ и $\sin(\arcsin\sqrt{x}) = \sin(\pi/3)$, $\sqrt{x} = \sqrt{3}/2$, $x = 3/4$.

Задача 5. Решить уравнение $\arcsin x = \operatorname{arctg} x$.

Уравнение определено на отрезке $[-1;\ 1]$. Очевидно, что $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$. Отсюда

$$\frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = x; \quad \frac{x}{\cos(\arcsin x)} = x; \quad x\left(\frac{1}{\cos(\arcsin x)} - 1\right) = 0.$$

Последнее уравнение равносильно конъюнкции уравнений $x = 0$ и $1/(\cos(\arcsin x)) = 1$.

Решаем второе уравнение: $\cos(\arcsin x) = 1$, $\arcsin x = 0$, $\sin(\arcsin x) = 0$, $x = 0$.

Ответ. 0.

Задача 6. Решить уравнение $\sin(0{,}2\arccos x) = 1$.

Так как $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, то $0 \leqslant 0{,}2\arccos x \leqslant 0{,}2\pi$. Отсюда ясно, что данное уравнение решений не имеет.

Задача 7. Решить неравенство

$$\operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x < 3\pi/4. \tag{9.40}$$

Решим сначала уравнение, соответствующее неравенству (9.40):

$$\operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x = 3\pi/4. \tag{9.41}$$

Применив формулу $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)/(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)$, получим

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2x) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3x)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2x)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3x)} = \frac{5x}{1 - 6x^2}.$$

Уравнение

$$5x/(1-6x^2)=\operatorname{tg}(3\pi/4) \qquad (9.42)$$

не равносильно уравнению (9.41). В самом деле, уравнение (9.42) имеет корни 1 и $-1/6$. Но $\operatorname{arctg}(-2\cdot\frac{1}{6})+\operatorname{arctg}(-3\cdot\frac{1}{6})<0$, так как оба слагаемых отрицательны. Правая часть уравнения (9.41) положительна. Итак, число $-1/6$ не является корнем уравнения (9.41).

Если $x=1$, то уравнение (9.41) принимает вид

$$\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3=0{,}75\pi. \qquad (9.43)$$

Очевидно, что $\pi/4<\operatorname{arctg}2<\pi/2$ и $\pi/4<\operatorname{arctg}3<\pi/2$. Поэтому $\pi/2<$ $<\operatorname{arctg}2+\operatorname{acrtg}3<\pi$ и $1/2<3\pi/4<\pi$.

Итак, левая и правая части равенства (9.43) принадлежат промежутку $(\pi/2;\ \pi)$. Так как функция tg на $(\pi/2;\ \pi)$ монотонна и $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3)=$ $=\operatorname{tg}(3\pi/4)$, то число 1 является корнем уравнения (9.41). Функция $y=$ $=\operatorname{arctg}2x+\operatorname{arctg}3x$ возрастающая. Поэтому решением неравенства (9.40) является промежуток $(-\infty;\ 1)$.

9.11. Исследовательский метод решения тригонометрических уравнений и неравенств

Сущность исследовательского метода раскрыта в гл. 5, поэтому остановимся только на некоторых его особенностях (применительно к периодическим функциям).

Задача 1. Решить относительно x уравнение $\sin^2(x/2)\cos x=a$.

Преобразуем данное уравнение к виду $a=0{,}5\ (\cos x-\cos^2x)$ и обозначим $\cos x=z$, $-1\leqslant z\leqslant 1$. Построим графики функций $y=-0{,}5z^2+0{,}5z$, $y=$ $=a$ (при некоторых значениях параметра a). Получим (рис. 9.13):

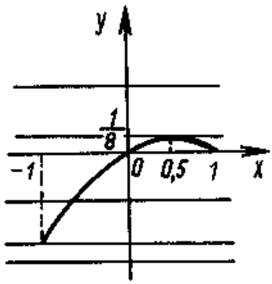


Рис. 9.13

1) при $a=1/8$ данное уравнение имеет одно решение ($\cos x_1=1/2$);

2) если $0<a<1/8$, уравнение имеет два решения ($\cos x_1=m$, $0<m<$ $<1/2$; $\cos x_2=n$, $1/2<n<1$);

3) если $a=0$, имеем также два решения ($\cos x_1=0$; $\cos x_2=1$);

4) если $-1<a<0$, имеем одно решение ($\cos x_1=k$, $-1<k<0$);

5) при $a=-1$ уравнение имеет одно решение ($\cos x_1=-1$).

З а д а ч а 2. Найти все решения неравенства $\sqrt{3\cos 2x} > \sqrt{2}\cos x$, удовлетворяющие условию $|x| < \pi$.

Функция $y_1 = \sqrt{3\cos 2x}$ определена на $(-\pi/4;\ \pi/4)$. Функция $y_2 = \sqrt{2}\cos x$ определена на $(-\pi;\ \pi)$, поэтому данное неравенство определено на $[-\pi/4; \pi/4]$.

Функция $y = \sqrt{3\cos 2x} - \sqrt{2}\cos x$ на $[-\pi/4;\ 0]$ монотонная, поэтому на этом отрезке не более одной точки, в которой $y_1 = y_2$. Нетрудно заметить, что $y_1(-\pi/6) = y_2(-\pi/6)$. Вследствие четности функций y_1 и y_2 верно и равенство $y_1(\pi/6) = y_2(\pi/6)$. Теперь ясно, что решением данного неравенства является промежуток $(-\pi/6;\ \pi/6)$.

З а д а ч а 3. Решить относительно x неравенство

$$\cos x - 1/\cos x \leqslant a,\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

Строим график функции $y = \cos x - 1/\cos x$ на $[0;\ \pi/2) \cup (\pi/2;\ 3\pi/2) \cup (3\pi/4;\ 2\pi]$. Пусть x_1', x_2' — корни уравнения $\cos x - 1/\cos x = a$, если $a < 0$, и x_1, x_2 — корни этого уравнения, если $a > 0$.

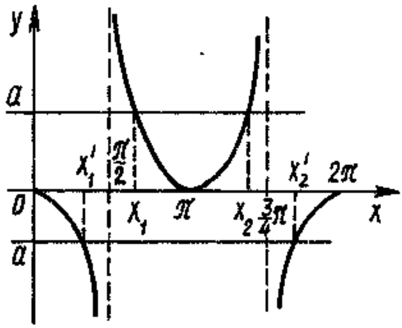


Рис. 9.14

Из графика (рис. 9.14) ясно, что:

1) если $a = 0$, то $0 \leqslant x < \pi/2$ или $3\pi/2 < x \leqslant 2\pi$;

2) если $a < 0$, то $x_1' \leqslant x < \pi/2$ или $3\pi/2 < x \leqslant x_2'$;

3) если $a > 0$, то $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, или $0 \leqslant x < \pi/2$, или $3\pi/2 < x \leqslant 2\pi$.

З а д а ч а 4. Доказать неравенство

$$\cos(\cos x) > 0. \qquad (9.44)$$

Известно, что $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Функция $\cos x$ четная, и $1 < \pi/2$. Поэтому функция $y = \cos(\cos x)$ положительная.

З а д а ч а 5. Доказать, что при любом α верно неравенство

$$4\sin 3\alpha \geqslant 4\cos 2\alpha + 5\sin\alpha - 5. \qquad (9.45)$$

Выразим $\sin 3\alpha$ и $\cos 2\alpha$ через $\sin\alpha$:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha;\quad \sin 3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha.$$

После этого неравенство (9.45) принимает вид

$$16\sin^3\alpha - 8\sin^2\alpha - 7\sin\alpha - 1 \leqslant 0.$$

Обозначив $\sin\alpha = t$, получим $16t^3 - 8t^2 - 7t - 1 \leqslant 0$. Исследуем функцию $f(t) = 16t^3 - 8t^2 - 7t - 1$ на $[-1;\ 1]$. Находим $f'(t) = 48t^2 - 16t - 7$. Корни уравнения $f'(t) = 0$: $t_1 = 7/12$, $t_2 = -1/4$. Получаем $f(t_1) < 0$, $f(t_2) = 0$, $f(-1) < 0$, $f(1) = 0$. Так как функция $f(t)$ непрерывная, утверждение задачи доказано.

9.12. Комплексное использование различных методов решения тригонометрических уравнений

Комплексное применение свойств тригонометрических функций позволяет свести тригонометрическое уравнение к алгебраическому. Для этого нужно преобразовать тригонометрическое уравнение таким образом, чтобы в нем содержались только функции одного и того же аргумента, а затем использовать универсальные подстановки. Разумеется, не всегда такой план решения задачи оказывается достаточно рациональным.

З а д а ч а 1. Решить уравнение

$$\sin 2x + \sin x - \sqrt{2}\cos x = \sqrt{2}/2. \tag{9.46}$$

Так как $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, то данное уравнение преобразуется к виду

$$2\sin x\cos x + \sin x - \sqrt{2}\cos x = \sqrt{2}/2. \tag{9.47}$$

Применив подстановки $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ к уравнению (9.47), имеем

$$\frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} + \frac{2t}{1+t^2} - \frac{\sqrt{2}(1-t^2)}{1+t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{9.48}$$

После тождественных преобразований уравнение (9.48) будет иметь вид

$$\sqrt{2}t^4 - 4t^3 - 2\sqrt{2}t^2 + 12t - 3\sqrt{2} = 0. \tag{9.49}$$

Попытаемся решить уравнение (9.49) путем разложения его левой части на множители. Очевидно, что $\sqrt{2}t^4 - 2\sqrt{2}t^2 - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}(t^2+1)(t^3-3)$ и $-4t^3 + 12t = -4t(t^2-3)$. Поэтому уравнение (9.49) заменяем следующим:

$$(t^2 - 3)(\sqrt{2}t^2 + \sqrt{2} - 4t) = 0. \tag{9.50}$$

Решив уравнение (9.50), получаем: $t_1 = \sqrt{3}$, $t_2 = -\sqrt{3}$, $t_3 = \sqrt{2} - 1$, $t_4 = \sqrt{2} + 1$. Таким образом,

$$\operatorname{tg}(x/2) = \sqrt{3} \Rightarrow x/2 = \pi/3 + k\pi \Rightarrow x = 2\pi/3 + 2k\pi;$$

$$\operatorname{tg}(x/2) = -\sqrt{3} \Rightarrow x/2 = -\pi/3 + k\pi \Rightarrow x = -2\pi/3 + 2k\pi;$$

$$\operatorname{tg}(x/2)=\sqrt{2}-1 \Rightarrow x/2=\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)+k\pi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)+2k\pi;$$
$$\operatorname{tg}(x/2)=\sqrt{2}+1 \Rightarrow x/2=\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)+k\pi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x= 2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)+2k\pi.$$

Ответ. $x_1=\pm 2\pi/3+2k\pi$; $x_2=2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\pm 1)+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$.

Преобразование уравнения (9.46) к виду $\sin x\ (2\cos x+1)=0{,}5\sqrt{2}\ (1+2\cos x)$ открывает путь к более простому его решению.

Задача 2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$a(4-\sin x)^4-3+\cos^2 x+a>0 \tag{9.51}$$

выполняется для всех x.

Обозначим $\sin x=t$. Тогда $\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-t^2$. После этого данное неравенство принимает вид

$$a(4-t)^4-2-t^2+a>0,\ -1\leqslant t\leqslant 1. \tag{9.52}$$

Решаем неравенство (9.52) относительно a:

$$a>\frac{t^2+2}{(4-t)^4+1}. \tag{9.53}$$

Исследуем функцию

$$a=\frac{t^2+2}{(4-t)^4+1}, \tag{9.54}$$

заданную на $[-1;\ 1]$. Для этого построим графики функций $f(t)=t^2+2$ и $\varphi(t)=(4-t)^4+1$ (рис. 9.15).

Очевидно, что функция $\varphi(t)$ монотонно убывает на $[-1;\ 1]$. На $[0;\ 1]$ функция f возрастает от 2 до 3, а функция φ убывает от 257 до 82. Поэтому наибольшее значение функция (9.54) на $[0;\ 1]$ принимает в точке $t=1$. Оно равно 3/82.

На $[-1;\ 0]$ наибольшее значение функции f равно 3, а наименьшее значение функции φ равно 257. Поэтому на $[-1;\ 0]$ верны неравенства $a<3/257<$ $<3/82$.

Таким образом, получаем, что неравенство (9.51) выполняется для всех значений x, если $a>3/82$.

Задача 3. Решить уравнение

$$2\sin 2x+2\cos^2 x-2\cos x-3\sin x=0. \tag{9.55}$$

Очевидно, что уравнение (9.55) равносильно следующему уравнению:

$$4\sin x\cos x+2\cos^2 x-2\cos x-3\sin x=0. \tag{9.56}$$

Применив универсальные подстановки $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,

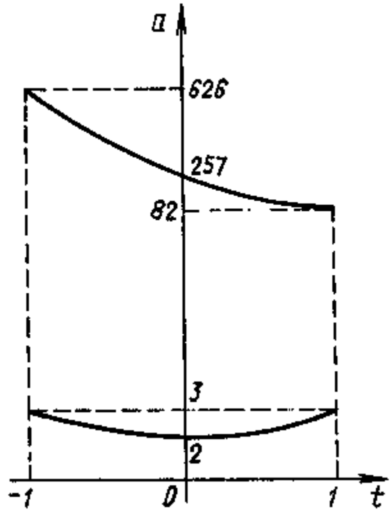


Рис. 9.15

$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, преобразуем уравнение (9.56) :

$$\frac{8t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} + \frac{2(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} - \frac{2(1-t^2)}{1+t^2} - \frac{6t}{1+t^2} = 0. \qquad (9.57)$$

В результате равносильных преобразований уравнения (9.57) получаем

$$t(2t^3 - 7t^2 - 2t + 1) = 0. \qquad (9.58)$$

Рациональным корнем уравнения $2t^3 - 7t^2 - 2t + 1 = 0$ является $1/2$, поэтому уравнение (9.58) заменяется равносильным ему уравнением $t(2t + 1)(t^2 - 4t + 1) = 0$.

Итак, $t_1 = 0$, $t_2 = -1/2$, $t_3 = 2 - \sqrt{3}$, $t_4 = 2 + \sqrt{3}$. Таким образом,

$$\operatorname{tg}(x/2) = 0 \Rightarrow x/2 = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi;$$

$$\operatorname{tg}(x/2) = -1/2 \Rightarrow x/2 = -\operatorname{arctg}(1/2) + k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -2\operatorname{arctg}(1/2) + 2k\pi;$$

$$\operatorname{tg}(x/2) = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x/2 = \operatorname{arctg}(2 \pm \sqrt{3}) + k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2\operatorname{arctg}(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi.$$

Ответ. $2k\pi$; $-2\operatorname{arctg}(1/2) + 2k\pi$; $2\operatorname{arctg}(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

10. ПРИМЕНЕНИЕ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

10.1. Общие сведения

В настоящее время микрокалькуляторы находят все большее применение в учебном процессе. Освобождение учащихся от однообразной вычислительной работы позволяет уделять больше внимания алгоритмам вычислений, делает занятия более творческими, способствует повышению интереса к математике и создает возможности для более успешного применения расчетов на практике.

Программируемые микрокалькуляторы являются универсальными и многоцелевыми вычислительными устройствами. Они дают возможность во много раз сократить время, необходимое для составления индивидуальных заданий, проверки самостоятельных и контрольных работ.

Высокая точность и быстрота вычислений позволяют широко и систематически использовать в учебном процессе математический эксперимент, знакомить учащихся с достаточно общими методами поиска и обоснования решений сложных нестандартных задач. Программируемые микрокалькуляторы помогают на более высоком методическом уровне организовать индивидуальную и коллективную работу учащихся, являются надежным и удобным средством поэтапного контроля правильности тождественных преобразований выражений с переменными.

В этой главе на конкретных примерах показано, как эффективно использовать программируемый микрокалькулятор при поиске решений различных задач. Коренным образом изменяется методика решения следующих задач: тождественное преобразование громоздких числовых выражений и выражений с переменными; разложение выражений с многими переменными на множители; поиск и обоснование свойств различных числовых множеств; задачи на делимость чисел; исследование функций, построение и применение их графиков; исследование решений уравнений и неравенств и их систем; решение нестандартных уравнений и неравенств; доказательство нестандартных неравенств; исследование решений геометрических задач; анализ таблиц значений функций с целью получения правдоподобных гипотез о их свойствах.

Программируемые микрокалькуляторы позволяют эффективно и в комплексе использовать различные методы поиска решений задач. Систематическая работа с микрокалькуляторами на практикумах по решению математических задач усиливает профессиональную направленность этих занятий.

10.2. Тождественные преобразования выражений

Задача 1. Вычислить $\sqrt[5]{682+305\sqrt{5}}$.

Будем искать рациональные числа n и k, такие, что $\sqrt[5]{606+271\sqrt{5}} = n+k\sqrt{5}$. Для этого с помощью микрокалькулятора последовательно находим:

$$\sqrt{5} \approx 2{,}\underline{236}0679; \tag{10.1}$$

$$\sqrt{5}\cdot 305 \approx 682{,}0007; \tag{10.2}$$

$$682 + 682{,}0007 \approx 1364{,}0007; \tag{10.3}$$

$$\sqrt[5]{682 + 305\sqrt{5}} \approx 4{,}\underline{236}0679. \tag{10.4}$$

Сравнивая равенства (10.1) и (10.4), приходим к предположению, что $k = 1$ и $n = 2$, т.е., вероятно,

$$\sqrt[5]{682 + 305\sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5}. \tag{10.5}$$

В справедливости равенства (10.5) легко убедиться, возведя обе его части в пятую степень.

Задача 2. Сумма трех целых чисел a, b, c равна нулю. Доказать, что число $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$ является квадратом целого числа.

Выражение $2(a^4 + b^4 + c^4)$ – это сумма четвертых степеней, причем и в этом выражении, и в равенстве $a + b + c = 0$ переменные a, b, c симметричны. Попытаемся получить гипотезу о каких-либо свойствах данного выражения путем рассмотрения частных случаев.

Если, например, $a = 1$, $b = 2$, то $c = -3$ и $2(a^4 + b^4 + c^4) = 2(1^4 + 2^4 + (-3)^4) = 196 = 14^2$. Если $a = 2$, $b = 3$, то $c = -5$, $2(a^4 + b^4 + c^4) = 1444 = 38^2$. Если $a = -3$, $b = 8$, то $c = -5$, $2(a^4 + b^4 + c^4) = 9604 = 98^2$. Но как связаны значения a, b и c с основаниями квадратов $14^2, 38^2, 98^2$?

Легко заметить, что $14 = 1^2 + 2^2 + (-3)^2$, $38 = 2^2 + 3^2 + (-5)^2$, $98 = (-3)^2 + 8^2 + (-5)^2$. Итак, появляется гипотеза, что $2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$, если $a + b + c = 0$. Полученная в результате математического эксперимента гипотеза легко доказывается.

10.3. Поиск свойств числовых множеств

Задача 1. Рассматриваются всевозможные семизначные числа K с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, записанными в произвольном порядке. Существуют ли среди этих чисел два таких числа M и n, что M делится на n?

Во-первых, сумма цифр числа K равна 28, поэтому M и n не делятся на 3 и 6. Во-вторых, 7654321 является наибольшим из чисел K, а 1234567 – наименьшим из всех чисел K. Так как $7654321 : 1234567 \approx 6{,}3$, ясно, что при делении M на n может получиться только 2, 4 или 5.

Если число M делится на 5, то оно должно оканчиваться цифрой 5. Ясно, что первой цифрой числа M может быть только 6 или 7. Рассмотрим несколько примеров (вычисления ведутся с помощью микрокалькулятора): $7643215 : 5 = 1528643$; $7436125 : 5 = 1487225$; $7432165 : 5 = 1486433$; $6374125 : 5 = 1274825$; $6142375 : 5 = 1228475$; $6137245 : 5 = 1227449$.

Замечаем, что все частные содержат цифру 8 или 9. Почему? Да потому, что при делении на 5 всегда приходится делить число 41, 42, 43 или 45 на 5. Таким образом, осталось выяснить, существует ли равенство $2n = M$ или $4n = M$. Рассмотрим примеры: $3765421\cdot 2 = 7530842$; $3765412\cdot 2 = 7530824$; $2563714\cdot 2 = 5127428$; $1654372\cdot 2 = 3308744$; $2134567\cdot 2 = 4269134$; $1234765\cdot 2 = 2469530$.

Становится понятным, что при умножении любого числа n на 2 получаем число с цифрой 8, если после 4 в n стоит цифра 1, 2 или 3. Если в n после цифры 4 стоит цифра 5, 6 или 7, то при его умножении на 2 получаем число с цифрой 9.

Осталось выяснить, существует ли равенство $4n = M$. Рассмотрим несколько примеров:

$1765432 \cdot 4 = 7061728;$	$1\underline{276}543 \cdot 4 = 5106172;$
$1374625 \cdot 4 = 5498500;$	$1354627 \cdot 4 = 5418508;$
$1\underline{257}346 \cdot 4 = 7029384;$	$1\underline{247}653 \cdot 4 = 4990612;$
$15\underline{267}43 \cdot 4 = 6106972;$	$1567\underline{234} \cdot 4 = 6268936;$
$17\underline{236}54 \cdot 4 = 6893616;$	$1\underline{243}576 \cdot 4 = 4974304;$
$17\underline{246}53 \cdot 4 = 6898612;$	$17\underline{253}64 \cdot 4 = 6901456;$
$1\underline{256}734 \cdot 4 = 5026936;$	$1\underline{263}754 \cdot 4 = 5055016;$
$17\underline{265}43 \cdot 4 = 6906172;$	$1\underline{274}536 \cdot 4 = 5098144;$

$1\underline{273}456 \cdot 4 = 5093824;$
$1\underline{237}654 \cdot 4 = 4950616;$
$1\underline{275}643 \cdot 4 = 5102572;$
$174\underline{235}6 \cdot 4 = 6969424;$
$1\underline{245}763 \cdot 4 = 4983052;$
$1\underline{254}763 \cdot 4 = 5019052;$
$15\underline{264}73 \cdot 4 = 6105892.$

Во-первых, ясно, что n может начинаться только цифрой 1 и не может оканчиваться цифрой 2, 7 или 5. Во-вторых, M в каждом из равенств содержит цифру 0, 8 или 9. И это зависит от того, какие две цифры стоят в n после 2:34, 35, 36, 37, 43, 45, 46, 47, 53, 54, 56, 57, 63, 64, 65, 67, 73, 74, 75, 76. Таким образом, доказано, что задача не имеет решения.

З а д а ч а 2. Найти целую часть числа $(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})^2$, если n – натуральное число.

Обозначим:

$$(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})^2 = f(n); \tag{10.6}$$

$$[(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})^2] = \varphi(n).$$

Для получения гипотезы выполним математический эксперимент, т.е. составим табл. 10.1 некоторых значений функций $f(n)$ и $\varphi(n)$.

Из табл. 10.1 ясно, что

$$\varphi(n) = 9n+8 \tag{10.7}$$

и

$$9n+8 < f(n) < (9n+8)+1. \tag{10.8}$$

Для обоснования полученных гипотез преобразуем функцию $f(n)$ следующим образом: $f(n) = n+(n+1)+(n+2)+2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}\sqrt{n+2}+$ $+2\sqrt{n+1}\sqrt{n+2} = 3n+3+2(\sqrt{n}\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\sqrt{n+2})$.

n	$f(n)$	$\varphi(n)$	n	$f(n)$	$\varphi(n)$
1	17,191508	17	11	107,87477	107
2	26,484036	26	12	116,88442	116
3	35,618441	35	13	125,89270	125
4	44,696680	44	14	134,89999	134
5	53,748090	53	15	143,90615	143
6	62,784516	62	16	152,91167	152
7	71,811721	71	17	161,91659	161
8	80,832771	80	18	170,92097	170
9	89,849589	89	19	179,92493	179
10	98,863327	98	20	188,92861	188

Согласно теореме о средних $0,5\,(a+b) \geqslant ab$ $(a, b \geqslant 0)$, получаем: $2\sqrt{n}\times\sqrt{n+1} < 2n+1$, $2\sqrt{n}\sqrt{n+2} < 2n+2$, $2\sqrt{n+1}\sqrt{n+2} < 2n+3$. Таким образом, $f(n) < 9n+9$.

Теперь докажем неравенство $f(n) > 9n+8$. Для этого исследуем с помощью производной функцию

$$y(x) = (\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})^2 - 9x - 8, \quad x \geqslant 1.$$

Находим $y'(x) = 2(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right) -$

$$-9 = -6 + \left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right) + \left(\sqrt{\frac{x}{x+2}}+\sqrt{\frac{x+2}{x}}\right) + \left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} + \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\right).$$

Так как выражение в каждой круглой скобке не меньше 2, то $y'(x) > 0$. Отсюда ясно, что $y(n)$ — возрастающая функция, и для доказательства неравенства $f(n) < 9n+9$ достаточно проверить его справедливость при $n = 1$. Таким образом, доказано, что $\varphi(n) = 9n+8$.

10.4. Исследование функций

Задача 1. Исследовать корни уравнения

$$x^4 + a(x-1)^4 = 8, \tag{10.9}$$

где a — параметр, и функцию

$$a(x) = a = \frac{8-x^4}{(x-1)^4}. \tag{10.10}$$

Строим график функции (10.10) следующим образом. Замечаем, что выражение $(8-x^4)/(x-1)^4$ не определено в точке $x = 1$; $a(x) = 0$, если $x = -\sqrt[4]{8}$ или $x = \sqrt[4]{8}$. Обозначим $-\sqrt[4]{8} = m$, $\sqrt[4]{8} = n$.

Составляем с помощью микрокалькулятора таблицу значений функций $f(x) = 8 - x^4$, $\varphi(x) = (x-1)^4$, $a(x) = f(x)/\varphi(x)$ (табл. 10.2).

Таблица 10.2

x	$f(x)$	$\varphi(x)$	$a(x)$
0	8,00	1,00	8,00
–0,2	7,99	2,07	3,86
–0,4	7,97	3,84	2,08
–0,6	7,87	6,55	1,20
–0,8	7,59	10,5	0,72
–1,0	7,00	16,0	0,44
–1,2	5,93	23,4	0,25
–1,4	4,16	33,2	0,13
–1,6	1,45	45,7	0,03
$x_0 = -\sqrt[4]{8}$	0,00	53,1	0,00
–1,8	–2,50	61,5	–0,04
–2,0	–8,00	81,0	–0,10
–2,5	– 31,1	150	–0,21
–3,0	–73,0	256	–0,29
–4,0	– 248	625	–0,40
–5,0	– 617	1296	–0,48
– 10,0	– 9992	14641	–0,68
– 15,0	– 50617	65536	–0,77
– 20,0	– 160000	194481	–0,82
– 25,0	– 390625	456976	–0,85
0,2	7,99	0,41	20,0
0,4	7,97	0,13	61,3
0,6	7,87	0,03	303
0,8	7,59	0,0016	4744
1,0	7,00	0,00	–
1,2	5,93	0,0016	3706
1,4	4,16	0,03	160
1,6	1,45	0,13	11,2
$x_0 = \sqrt[4]{8}$	0,00	0,24	0,00
1,8	–2,50	0,41	–6,09
2,0	–8,00	1,00	–8,00
2,2	– 15,4	2,07	–7,44
2,4	– 25,2	3,84	–6,56
2,6	– 37,7	6,55	–5,76
2,8	– 53,5	10,5	–5,10
3,0	– 73,0	16,0	–4,56
3,5	– 142	39,1	–3,63
4,0	– 248	81,0	–3,06
10,0	– 9992	6561	–1,52
20,0	– 160000	130321	–1,23

По табл. 10.2 строим графики этих функций (рис. 10.1).

Какие свойства функций $f(x)$, $\varphi(x)$ и $a(x)$ можно увидеть из их графиков и табл. 10.2? И какие из обнаруженных свойств этих функций мы сможем обосновать?

Функция $f(x)$ принимает наибольшее значение в точке 0, и $f(0) = 8$. Она изменяется от $-\infty$ до 8. Ее график пересекает ось абсцисс в точках m и n и симметричен относительно оси ординат. Функция $\varphi(x)$ неотрицательная, $\varphi(1) = 0$. Она изменяется от 0 до $+\infty$. Ее график симметричен относительно прямой $a = 1$ (рис. 10.1). Функция $a(x)$ есть частное функций $f(x)$ и $\varphi(x)$. На $[m; 0]$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ положительные. На $[m; 0]$ функция $f(x)$ возрастает от 0 до 8, а функция $\varphi(x)$ убывает. Поэтому функция $a(x) = f(x)/\varphi(x)$ на этом промежутке возрастает от 0 до 8.

Анализируя таблицы и графики функций, замечаем, что отрицательная функция $a(x)$ на $(-\infty; m)$ больше -1 и монотонно возрастает до 0. Докажем, что если $x < m$, то $a(x) > -1$.

Очевидно, что $(8 - x^4)/(x-1)^4 > -x^4/(x-1)^4$. Поэтому, если докажем неравенство $-x^4/(x-1)^4 > -1$, тем самым докажем, что $a(x) > -1$. Но $(x/(x-1))^4 < 1$, если $x < -1$. Следовательно, верно и $a(x) > -1$, если $x < m < -1$.

Докажем, что если $x > n > 1$, то $a(x) > -8$, т.е. $(8 - x^4)/(x-1)^4 > -8$. После приведения к общему знаменателю и приведения подобных членов последнее неравенство принимает вид

$$x(9x^2 - 32x + 48) - 32 > 0. \qquad (10.11)$$

Легко убедиться, что наименьшее значение функции $u(x) = 9x^2 - 32x + 48$ больше 19. А так как $x > \sqrt[4]{8}$, т.е. $x > 1{,}7$, то неравенство (10.11) верно при $x > n$.

Докажем, наконец, что если $x > 2$, то $a(x) < -1$, т.е. $(8 - x^4)/(x-1)^4 < -1$ или $2x(2x^2 - 3x + 2) - 9 > 0$. Очевидно, что для $x > 2$ функция $v(x) = 2x^2 - 3x + 2$ возрастающая. Ее наименьшее значение (в точке $x = 2$) равно 4, поэтому неравенство $2x(2x^2 - 3x + 2) - 9 > 0$ при $x > 2$ верно.

Табл. 10.2 и график функции $a(x)$ позволяют получить ответы на следующие вопросы.

1. При каких значениях параметра a уравнение (10.9) имеет только одно решение? *Ответ.* При $a = -8$.

2. Сколько корней имеет уравнение (10.9), если $a = -1$? *Ответ.* При $a = -1$ уравнение (10.9) решений не имеет.

3. При каких значениях параметра a уравнение (10.9) имеет два решения? *Ответ.* $-8 < a < -1$ и $a > -1$.

4. На каких промежутках (табл. 10.2) функция $\varphi(x)$ изменяется быстрее, чем функция $f(x)$?

5. При каких значениях параметра a оба корня уравнения (10.9) положительны? *Ответ.* $a < -1$.

6. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения (10.9) и $x_2 \geqslant x_1$. Существуют ли такие значения параметра a, при которых $x_2 - x_1 < 1$?

7. Существуют ли такие значения параметра a, при которых $x_2 - x_1 > 1000$?

8. Как изменяются корни x_1 и x_2 уравнения (10.9), если параметр уменьшается от -8 до -1?

9. Существуют ли такие значения параметра a, при которых верны оба неравенства: $x_1 x_2 < 0$ и $x_1 x_2 > -1$?

10. Как изменяется произведение $x_1 x_2$, если a увеличивается от 0 до $+\infty$?

11. Существует ли такое значение параметра a, при котором уравнение (10.9) имеет три корня?

12. К чему стремится сумма $x_1 + x_2$, если a неограниченно возрастает?

13. Верно ли, что $x^4 + a(x-1)^4 > 8$, если $-1 < a < 1$? (При обосновании ответа используйте табл. 10.2 и рис. 10.1.)

14. Почему не существует такого значения a, при котором один из корней уравнения (10.9) равен 1?

15. Верно ли, что $x^4 + a(x-1)^4 > 8$, если $x_1 < x < x_2$?

16. При каких значениях a верно неравенство $x^4 + a(x-1)^4 > 8$ при всех x, принадлежащих [3; 4)? *Ответ.* $a > a(4)$.

З а д а ч а 2. Дано уравнение

$$x^3 + (2-a)x - a - 3 = 0. \tag{10.12}$$

Построить график этого уравнения и исследовать его корни (a — параметр).

Преобразуем уравнение (10.12):

$$a = \frac{x^3 + 2x - 3}{x+1} = x(x-1) + 3 - 6/(x+1). \tag{10.13}$$

Составляем с помощью микрокалькулятора таблицу значений функций: $f(x) = x(x-1) + 3$, $\varphi(x) = -6/(x+1)$, $a(x) = f(x) + \varphi(x)$ (табл. 10.3).

Строим графики функций $f(x)$, $\varphi(x)$ и $a(x)$ (рис. 10.2). В табл. 10.4 уточнено наименьшее значение функции $a(x)$ на $[-3; -2]$: $a(x_0) \approx 14{,}961944$, $x_0 \approx -2{,}0785$.

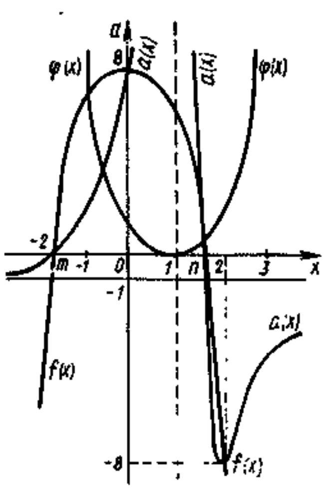


Рис. 10.1

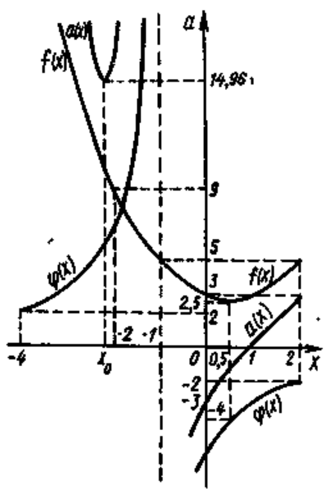


Рис. 10.2

Таблица 10.3

x	$f(x)$	$\varphi(x)$	$a(x)$
−1,0	5,0	–	–
−1,2	5,6	50	55,6
−1,4	6,4	15	21,4
−1,6	7,2	10	17,2
−1,8	8,0	7,5	15,5
−2,0	9,0	6,0	15,0
−2,2	10,0	5,0	15,0
−2,4	11,2	4,3	15,5
−2,6	12,4	3,8	16,2
−2,8	13,7	3,3	17,0
−3,0	15,0	3,0	18,0
−3,2	16,4	2,8	19,2
−3,4	18,0	2,5	20,5
−3,6	19,6	2,3	21,9
−3,8	21,2	2,1	23,3
−4,0	23,0	2,0	25,0
−0,8	4,4	−30,0	−25,6
−0,6	4,0	−15,0	−11,0
−0,4	3,6	−10,0	− 6,4
−0,2	3,2	− 7,5	− 4,3
0,0	3,0	− 6,0	− 3,0
0,2	2,8	− 5,0	− 2,2
0,4	2,7	− 4,3	− 1,6
0,6	2,5	− 4,0	− 1,5
0,8	2,9	− 3,3	− 1,4
1,0	3,0	− 3,0	0,0
1,2	3,2	− 2,7	0,5
1,4	3,6	− 2,5	1,1
1,6	4,0	− 2,3	1,7
1,8	4,4	− 2,1	2,3
2,0	5,0	− 2,0	3,0

Таблица 10.4

x	$a(x)$	x	$a(x)$
−2,0	15,0	−2,06	14,96398
−2,2	15,04	−2,08	14,961956
−2,15	14,99	−2,075	14,962020
−2,05	14.967	−2,085	14.962179
−2,03	14,976	−2,081	14,961977
−2,07	14,9624	−2,079	14,961945

Используя табл. 10.3, 10.4 и рис. 10.2, выполните приведенные ниже упражнения.

1. Назовите наименьшее значение функции $f(x)$.

2. Чему равно наибольшее значение функции $f(x)$ на $[0;\ 2]$?

3. Назовите наименьшее значение функции $f(x)$ на $(-1;\ 0]$.

4. Назовите наименьшее значение функции $f(x)$ на $(-1;\ 1)$.

5. На каком промежутке функция $f(x)$ убывает?

6. На каком промежутке функция $f(x)$ возрастает?

7. Докажите, что функция $\varphi(x)$ на $(-4;\ -1)$ возрастает.

8. Назовите приближенное значение x, при котором верно равенство $f(x)=\varphi(x)$.

9. Почему уравнение $f(x)=\varphi(x)$ имеет только одно решение?

10. Верно ли, что функция $\varphi(x)$ возрастающая?

11. Чему равно наибольшее значение функции $\varphi(x)$ на $(-1;\ 2]$?

12. В скольких точках график функции $\varphi(x)$ пересекает ось ординат?

13. Почему график функции $\varphi(x)$ не пересекает ось абсцисс?

14. Докажите неравенство $a(x)\geqslant 14$, если $-2{,}2\leqslant x\leqslant -2{,}0$ (непрерывная функция $f(x)$ на $[-2{,}2;\ -2{,}0]$ убывает от 10 до 9 (см. табл. 10.3); непрерывная функция $\varphi(x)$ на этом отрезке возрастает от 5 до 6. Но $a(x)=f(x)+\varphi(x)$, поэтому на $[-2{,}2;\ -2{,}0]$ функция $a(x)$ не может быть меньше 14).

15. Докажите, что уравнение $f(x)=\varphi(x)$ не имеет положительных корней.

16. Имеет ли корни уравнение $a(x)=\varphi(x)$? (Не имеет, потому что $a(x)=\varphi(x)+f(x)$ и $f(x)>0$.)

17. Почему функция $a(x)$ возрастает на $[0;\ 0{,}5]$? (На этом промежутке $f(x)$ убывает от 3 до 2,5, а $\varphi(x)$ возрастает от -6 до -4.)

18. При каких значениях параметра a уравнение $x^3+(2-a)x-a-3=0$ не имеет корней?

19. Назовите несколько значений параметра a, при которых уравнение $x^3+(2-a)x-a-3=0$ имеет: один корень; три корня; два отрицательных корня; один отрицательный корень; только положительный корень.

20. Существует ли такое значение параметра a, при котором сумма всех трех корней уравнения $x^3+(2-a)x-a-3=0$ положительна?

21. Существует ли такое значение параметра a, при котором корень уравнения $x^3+(2-a)x-a-3=0$ равен -1?

22. Как изменяются корни уравнения $x^3+(2-a)x-a-3=0$, если параметр a увеличивается от -6 до 20?

23. Существует ли такое значение параметра a, при котором произведение трех действительных корней уравнения $x^3+(2-a)x-a-3=0$ больше 1000?

Задача 3. Найти наименьшее значение функции

$$\psi(x)=\sqrt{15-12\cos x}+\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin x} \tag{10.14}$$

на $[0;\ 0{,}5\pi]$.

Так как $|\cos x|\leqslant 1$ и $|\sin x|\leqslant 1$, то функция $\psi(x)$ определена на всем отрезке $[0;\ \pi/2]$. Для поиска свойств функций $f(x)=\sqrt{15-12\cos x}$, $\varphi(x)=\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin x}$, $\psi(x)=f(x)+\varphi(x)$ с помощью микрокалькулятора составляем таблицу их значений (табл. 10.5).

x^0	$f(x)$	$\varphi(x)$	$\psi(x)$
0	1,7320508	2,6457513	4,3778021
5	1,7451827	2,5290645	4,2742472
10	1,7839021	2,4076816	4,1915837
15	1,8463179	2,2818523	4,1281702
20	1,9296859	2,1518401	4,0815260
25	2,0308387	2,0179237	4,0487624
30	2,1465542	1,8803984	4,0269526
35	2,2738018	1,7395827	4,0133843
40	2,4098684	1,5958185	4,0056869
45	2,5523945	1,4494896	4,0018841
50	2,6993608	1,3010333	4,0003941
55	2,8490493	1,1509769	4,0000262
60	3,0000020	0,9999989	4,0000001
65	3,1509650	0,84906731	4,0000323
70	3,3008723	0,69972737	4,0003597
75	3,4487928	0,55485998	4,0036627
80	3,5939145	0,42077535	4,0168993
85	3,7355228	0,31330512	4,0488279
90	3,8729833	0,26794924	4,1409325

На основании табл. 10.5 можно высказать предположение, что на $[0;\ \pi/2]$ функция $\psi(x) \geqslant 4$, причем $\psi(\pi/3) = 4$.

Итак, попытаемся доказать, что

$$\sqrt{15 - 12\cos x} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}\sin x} \geqslant 4. \tag{10.15}$$

Обозначим $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}\sin x} = t$. Отсюда

$$\sin x = \frac{7 - t^2}{4\sqrt{3}}\ ;\ \cos x = \sqrt{1 - \frac{(7 - t^2)^2}{48}},$$ и неравенство (10.15)

принимает вид

$$\sqrt{15 - \sqrt{3}\sqrt{48 - (7 - t^2)^2}} \geqslant 4 - t. \tag{10.16}$$

Обе части неравенства (10.16) неотрицательные, поэтому после возведения обеих его частей в квадрат получаем равносильное неравенство

$$15 - \sqrt{3}\sqrt{48 - (7 - t^2)^2} \geqslant (4 - t)^2$$

или

$$\sqrt{3}\sqrt{48 - (7 - t^2)^2} \leqslant 8t - 1 - t^2.$$

Отсюда $t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 \geqslant 0$. Применив теорему Безу, получим $(t - 1)(t^3 - 3t^2 + 3t - 1) \geqslant 0$ или $(t - 1)^4 \geqslant 0$. Таким образом, доказано, что наименьшее значение функции $\psi(x)$ на $[0;\ \pi/2]$ равно 4.

10.5. Уравнения и неравенства

Традиционный (школьный) путь алгебраического решения уравнения заключается в том, что это уравнение с помощью тождественных преобразований выражений с переменными заменяют более простым, а уравнение с одной переменной — уравнением, для решения которого существует формула. В результате получают ответ, "точный" с точки зрения классической элементарной математики.

Из так называемых общих методов решения уравнений в школе чаще других используют разложение левой части уравнения $F(x) = 0$ на множители или замену переменных. Изучается и много частных приемов, которые позволяют найти корень уравнения как число или комбинацию каких-либо функций от параметров. Однако далеко не все уравнения можно решить таким образом. Но и тогда, когда уравнение решается (в традиционном школьном понимании), формула для нахождения его корня может оказаться достаточно громоздкой. Например, уравнение $\sin^3 x - \cos^3 x = 0{,}008$ имеет единственный дробный положительный корень $x_0 = 0{,}78916943$ (получен на микрокалькуляторе). Этот результат практически гораздо полезнее, чем точная формула, выражающая корень: $x_0 = \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin 0{,}008\right)\right)$ (все равно мы можем получить только приближенное значение x_0). Да и в общеобразовательном плане привычные для школьного учителя решения проигрывают по сравнению с "функциональным" решением этого уравнения. Для подтверждения этой мысли приведем два решения уравнения.

1. Функция $F(x) = \sin^3 x - \cos^3 x$ возрастает на $(0; \pi/2)$. Это утверждение основано на теореме о производной сложной функции и теореме о сумме двух возрастающих функций: $F(\pi/4) < 0{,}008$; $F(\pi/4) > 0{,}008$. Отсюда ясно, что уравнение $F(x) = 0{,}008$ имеет единственный корень, принадлежащий $(0; \pi/2)$. С помощью микрокалькулятора (методом деления отрезка пополам) получаем $x_0 = 0{,}78916943$.

2. Рассмотрим неравенство $|\sin x - \cos x| \leqslant 2$. Это верное неравенство. Поэтому существует такой угол α, что $\sin x - \cos x = 2\sin\alpha$. Тогда $\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x = 4\sin^2\alpha$, откуда $1 + \sin x\cos x = 0{,}5(3 - 4\sin^2\alpha)$. Поэтому данное уравнение приводится к виду $\sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha) = 0{,}008$ или $\sin 3\alpha = 0{,}008$. Так как угол α всегда можно взять в первой четверти, получаем $\sin x - \cos x = 2\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin 0{,}008\right)$.

Искусственные приемы, использованные во втором решении, могут оттолкнуть ученика от занятий математикой.

Преувеличенное внимание, уделяемое в школе уравнениям, решение которых оканчивается получением "точной" формулы их корней, неизбежно ведет к отрыву теории от практики, резко снижает образовательные и политехнические возможности школьного курса алгебры и начал анализа. Большинство выпускников средней школы, воспитанных на "точных" равенствах, целых и рациональных корнях уравнений (в крайнем случае выраженных радикалами), получаемых в итоге даже очень сложных нестандартных тождественных преобразований выражений с переменными, не может верно решить и квадратное уравнение, если его коэффициенты получены в результате инструментальных измерений. Традиционный школьный подход к решению уравнений не формирует функциональное мышление не только старшеклассников, но и учителей математики. И, как следствие этого, учитель, самостоятельно получивший формулу $x_0 = 0{,}25\pi + \arcsin\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}\arcsin 0{,}008\right)\right)$, не может, как правило, решить более простую задачу: сравнить дробные положительные корни уравнений $\sin^3 x - \cos^3 x = 0{,}008$ и $2\sin^3 x - \cos^3 x = 0{,}008$ (практически устную для человека, имеющего высшее математическое образование).

Сегодня, когда в школу пришли информатика и вычислительная техника, появились широкие возможности для формирования функционального мышления учащихся в процессе изучения уравнений. Систематическое применение микрокалькуляторов при работе над уравнениями коренным образом изменяет ее обучающее содержание. Серьезный политехнический подход к решению уравнений в школе практически можно реализовать только с помощью микрокалькулятора. Он позволяет не только упрощать и ускорять вычислительную работу, получать корни уравнений с достаточно высокой точностью, но и формировать у учащихся навыки составления таблиц функций (с определенной целью), навыки поиска, обнаружения и доказательства свойств уравнений путем анализа этих таблиц.

С помощью микрокалькулятора можно находить "точные" (с точки зрения элементарной математики) целые корни уравнений и в большинстве случаев рациональные корни и корни, выраженные радикалами (имеются в виду уравнения, содержащиеся в школьных учебниках и в сборниках конкурсных задач).

Калькулятор позволяет использовать при решении самых различных уравнений общий функциональный метод, основой которого является систематическое комплексное применение свойств всех функций, изучаемых в школе. При этом формируется не только общий метод решения уравнений, но и происходит комплексное повторение важнейших свойств изученных функций. Такое повторение является самым существенным в методике обучения учащихся решению уравнений.

Во всех отношениях (и с дидактической, и с практической точек зрения) более ценным является умение отделить корень уравнения и найти с нужной точностью его приближенное значение, чем головоломные упражнения в поисках его "точных" корней.

Задача на определение корней любого уравнения вида $F(x) = 0$ состоит из следующих наиболее типичных подзадач (всех или только некоторой части). Установление области определения $D(F)$ функции $F(x)$. Определение тех промежутков из $D(F)$, которым не могут принадлежать корни уравнения $F(x) = 0$ (без применения производной). Доказательство монотонности функции $F(x)$ на $D(F)$ или только на некоторых промежутках, принадлежащих $D(F)$ (без применения производной). Обоснование непрерывности функции $F(x)$. Установление пределов изменения функции $F(x)$ на $D(F)$ или на отдельных промежутках, принадлежащих $D(F)$. Решение уравнения $F'(x) = 0$ (для определения промежутков монотонности функции $F(x)$). Нахождение промежутка, являющегося частью промежутка, на котором верно неравенство $F'(x) > 0$ ($F'(x) < 0$). Преобразование уравнения $F(x) = 0$ к виду $P(x) = M(x)$, где $P(x)$ и $M(x)$ – функции, возрастающие или убывающие на некотором промежутке, который является частью $D(F)$. Доказательство неравенства $P(x) > M(x)$ $(P(x) < M(x))$ на этом промежутке. Доказательство неравенства $P'(x) > M'(x)$ $(P'(x) < M'(x))$. Получение с помощью микрокалькулятора гипотезы о числе корней уравнения и обоснование этой гипотезы. Нахождение целых (рациональных) корней уравнения. Вычисление корней уравнения, принадлежащих заданному промежутку. Доказательство того, что некоторому заданному промежутку не могут принадлежать корни данного уравнения. Нахождение приближенных значений корней уравнения. Получение гипотезы о их свойствах. Отыскание формулы для "точных" уравнений. Нахождение бесконечных промежутков, которым не могут принадлежать корни уравнения $F(x) = 0$. Составление с помощью инженерных или программируемых микрокалькуляторов таблиц функций, анализ которых позволяет высказать правдоподобные суждения о их свойствах, выбрать целесообразные методы доказательства этих свойств. Вычисление корней с точностью, определяемой точностью исходных данных.

Микрокалькулятор делает практически универсальным и самым простым в применении метод интервалов решения неравенств.

В средней школе учащиеся изучают общие свойства непрерывных функций, применение которых позволяет существенным образом упростить поиск решений нестандартных уравнений. В самом деле, девятиклассник знакомится с достаточным условием монотонности функций, правилами вычисления производных, производной сложной функции. Отсюда непосредственно следуют свойства суммы двух возрастающих (убывающих) функций, произведения двух положительных возрастающих (убывающих) функций, свойства сложных функций. Однако при решении уравнений и других задач прикладного характера эти важнейшие теоретические знания не находят применения, и поэтому ученики усваивают их формально. Поясним сказанное примерами.

1. Найти дробные корни уравнения $\lg x + \sin x = 1$.

Выпускник средней школы знает, что на $(0;\ 1)$ функции $y = \lg x$ и $y = \sin x$ возрастающие. Но он, как правило, не видит, какое отношение это имеет к решению уравнения.

2. Решить уравнение $\cos(\cos\sqrt{1-x}) + x^{-0,5} = 1 + \cos 1$.

На основании теоремы о производной сложной функции получаем, что функция $y = \cos(\cos\sqrt{1-x})$ убывающая (функция $y = 1 - x$ убывающая, $y = \sqrt{x}$ возрастающая, $y = \cos x$ убывающая). Отсюда понятно, что функция $F(x) = \cos(\cos\sqrt{1-x}) + x^{-0,5}$, определенная на $(0;\ 1]$, убывающая. Поэтому данное уравнение имеет не более одного корня. Так как $F(1) = 1 + \cos 1$, то для решения уравнения не требуется никаких вычислений. Но в школьных учебниках и конкурсных сборниках задач по математике учащийся не видит такого применения важнейших общих свойств функций. Поэтому он (а нередко и учитель математики) считает это уравнение очень сложным.

3. Решить уравнение $\sqrt[4]{777x - 2250} + \sqrt[7]{77x^3 + 108} = 6$.

Ученик, который не может анализировать уравнения, всесторонне используя свойства функций, эту задачу не может решить, даже если знает все названные выше свойства производной. Естественное решение этой задачи выглядит следующим образом. Левая часть уравнения определена на $[750/259;\ +\infty)$. На этом промежутке непрерывные неотрицательные функции $y = 777x - 2250$ и $y = 77x^3 + 108$ возрастающие. Функции $y = \sqrt[4]{x}$ и $y = \sqrt[7]{x}$ также возрастающие. Поэтому и сложные функции $P(x) = \sqrt[4]{777x - 2250}$ и $K(x) = \sqrt[7]{77x^3 + 108}$ возрастающие. Функция $F(x) = P(x) + K(x)$ непрерывная и возрастающая. Поэтому данное уравнение имеет не более одного корня x_0. С помощью микрокалькулятора легко находим, что $x_0 = 3$.

Приступая к решению уравнения $F(x) = 0$, прежде всего необходимо попытаться выяснить, имеет ли оно корни. В необходимых случаях (для получения гипотезы о существовании корней) с помощью микрокалькулятора составляем таблицу функции $F(x)$. Доказать, что уравнение $F(x) = 0$ не имеет корней, часто гораздо проще, чем заниматься его преобразованиями для получения "точных" корней. Таблица функции $F(x)$ облегчает выбор методов уединения корней уравнения $F(x) = 0$ и напоминает о существовании свойств функции $F(x)$.

Приведем общий план работы над задачей "Решить уравнение $F(x) = 0$". Находим $D(F)$. Не решая уравнения $F'(x) = 0$, используя только свойства суммы (произведения) непрерывных монотонных функций и свойства сложных функций, находим некоторые подмножества множества $D(F)$, на которых функция $F(x)$ монотонна. С помощью микрокалькулятора проверяем, принадлежат ли этим подмножествам корни уравнения $F(x) = 0$. Некоторые из этих подмножеств можно отыскать преобразованием уравнения $F(x) = 0$ в равносильное ему уравнение, либо получив все или часть решений неравенств $F'(x) > 0$ ($F'(x) < 0$). Если в $D(F)$ входит бесконечный промежуток, следует определить множество конечных промежутков, которым принадлежат все корни уравнения $F(x) = 0$.

Заметим, что определение корней уравнения $F'(x) = 0$ может оказаться более сложной задачей, чем решение уравнения $F(x) = 0$. Поэтому часто приходиться отказываться от мысли отделить корни уравнения $F(x) = 0$ путем нахождения критических точек функции $F(x)$. Во многих случаях отделение корней упрощается с помощью метода "ступенек". Для этого уравнение $F(x) = 0$ преобразуется к виду $P(x) = M(x)$ ($P(x)$ и $M(x)$ — функции, возрастающие или убывающие на некотором промежутке). С помощью микрокалькулятора составляют таблицы функций $P(x)$ и $M(x)$, $P'(x)$ и $M'(x)$ (с достаточно малым шагом). Работа над уравнением завершается уточнением отделенных корней.

З а д а ч а 1. Вычислить наименьший корень x_0 уравнения $x^2 - \sqrt{\lg x + 100} = 0$ (с относительной погрешностью не более 10^{-390} %).

Данное уравнение определено на $[10^{-100}; +\infty)$. Пусть $P(x) = x^2 - \sqrt{\lg x + 100}$. Очевидно, что $P(10^{-100}) > 0$, $P(1) < 0$, $P(0{,}1) < 0$. Заменим данное уравнение равносильным ему уравнением $x^4 = \lg x + 100$. Обозначим $M(x) = x^4$, $F(x) = \lg x + 100$. Находим $M'(x) = 4x^3$, $F'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10}$.

Если $10^{-100} < x < 0{,}1$, то $M'(x) < F'(x)$. Отсюда следует, что наименьший корень данного уравнения принадлежит интервалу $(10^{-100}; 10^{-1})$, которому другие корни этого уравнения не принадлежат. Заменим данное уравнение равносильным ему уравнением $x = \sqrt[4]{\lg x + 100}$. Если $x = 10^{-100} + 10^{-396}$, то $\sqrt[4]{\lg x + 100} = 10^{-99}$. Так как $10^{-100} + 10^{-396} < 10^{-99}$, то наименьший корень данного уравнения принадлежит интервалу $(10^{-100}, 10^{-100+10^{-396}})$. Но $(10^{-100+10^{-396}} - 10^{-100}) : 10^{-100} = 10^{10^{-396}} - 1$. Теперь остается доказать, что $10^{10^{-396}} < 10^{-392}$. С помощью микрокалькулятора получаем, что $\sqrt[10^6]{10} <$ $< 1{,}000003$. Так как $\sqrt[n]{1+a} < 1 + a/n$, $0 < a < 1$, то $10^{10^{-396}} = \sqrt[10^{396}]{10} =$

$$= \sqrt[10^{390}]{\sqrt[10^6]{10}} < \sqrt[10^{390}]{1{,}000003} < 1 + 10^{-395}.$$

Таким образом, $10^{-100} < x_0 < 10^{-100+10^{-396}}$

Задача 2. Решить уравнение $5(1-x^2)^{-0,5} - x^{-1} = 85/12$.

Положительная функция $P(x) = 5(1-x^2)^{-0,5}$ определена на $(-1;\ 0)$ и $(0;\ 1)$. Положительную функцию $F(x) = 1/x + 85/12$ рассматриваем на $(-1;\ -12/85)$ и $(0;\ 1)$. Для получения гипотезы о числе корней уравнения составляем таблицу функций $P(x)$ и $F(x)$ (табл. 10.6).

Функции $P(x)$ и $F(x)$ на $(-1;\ -12/85)$ убывают. Методом "ступенек" легко доказывается, что на этом промежутке данное уравнение корней не имеет. На $(0;\ 1)$ непрерывная функция $P(x)$ возрастает, $F(x)$ убывает. Число 0,8 является единственным корнем данного уравнения.

Задача 3. Решить уравнение $x^4 + 5x^3 - x^2 - 12x - 6 = 0$.

Приведем уравнение к виду $P(x) = K(x)$, где $P(x)$ и $K(x)$ — функции, исследование которых у учащихся не вызывает особых трудностей. Например, это уравнение можно заменить равносильными ему уравнениями: $x^2(x^2 + 5x - 1) = 12x + 6$, $x^2 + 5x - 1 = 6(2 + 1/x)/x$.

На $(0;\ +\infty)$ функция $P(x) = x^2 + 5x - 1$ возрастает, а функция $K(x) = 6(2 + 1/x)/x$ убывает. Поэтому данное уравнение имеет не более одного положительного корня x_1. С помощью микрокалькулятора легко обнаруживаем, что $1{,}5 < x_1 < 2$. Находим корни x' и x'' уравнения $x^2 + 5x - 1 = 0$: $x' = -5{,}1925825$, $x'' = 0{,}1925824$.

Таблица 10.6

x	$P(x)$	$F(x)$	x	$P(x)$	$F(x)$
−1	∞	6,08	0	5	∞
−0,9	11,4	5,97	0,1	5,02	17,1
−0,8	8,33	5,83	0,2	5,10	12,1
−0,7	7	5,65	0,3	5,24	10,4
−0,6	6,25	5,41	0,4	5,46	9,58
−0,5	5,77	5,08	0,5	5,77	9,08
−0,4	5,46	4,58	0,6	6,25	8,75
−0,3	5,24	3,75	0,7	7	8,51
−0,2	5,10	2,08	0,8	8,33	8,33
−12/85	5,05	0	1	∞	8,08

Таблица 10.7

x	$P(x)$	$K(x)$	x	$P'(x)$	$K'(x)$
–1	–5	–6	x'	–5,39	–0,359
–0,9	–4,69	–5,92	–5	–5	–0,384
–0,8	–4,36	–5,62	–4	–3	–0,563
–0,7	–4,01	–4,89	–3	–1	–0,888
–3	–7	–3,33	–2,5	0	–1,152
–2,5	–7,25	–3,84	–0,8	3,4	4,68
			–0,5	4	48

Наименьшее значение функции $P(x)$ равно –7,25 (в точке $x = -2{,}5$). Функция $K(x)$ равна нулю в точке $x = -0{,}5$. Она положительная на $(-0{,}5;\ 0)$, и $K(x) < 0$ на $(-\infty;\ -0{,}5)$. Отсюда ясно, что на $(-0{,}5;\ 0)$ и $(-\infty;\ x')$ рассматриваемое уравнение корней не имеет. Наименьшее значение функции $K(x)$ равно –6 (в точке $x = -1$). На $(-2{,}5;\ -1)$ функция $P(x)$ возрастает, а функция $K(x)$ убывает, поэтому этому интервалу принадлежит не более одного корня x_2 данного уравнения. С помощью микрокалькулятора получаем $-1{,}5 < x_2 < -1$. Осталось выяснить, существуют ли корни на $(x';\ -2{,}5)$ и $(-1;\ -0{,}5)$. Находим $P(x') > K(x')$ и $P(-2{,}5) < K(-2{,}5)$; $P(-1) > K(-1)$ и $P(-0{,}5) < K(-0{,}5)$. Отсюда ясно, что интервалам $(x;\ -2{,}5)$ и $(-1;\ -0{,}5)$ принадлежат корни уравнения.

Докажем, что интервалам $(x';\ -2{,}5)$ и $(-1;\ -0{,}5)$ принадлежит по одному корню исследуемого уравнения. Для этого составим таблицу функций $P(x)$, $K(x)$, $P'(x)$, $K'(x)$ (табл. 10.7).

Теперь ясно, что интервалам $(x';\ -2{,}5)$ и $(-1;\ -0{,}5)$ принадлежит только по одному корню уравнения. После уточнения получаем: $x_1 = 1{,}61803$; $x_2 = -1{,}2679$; $x_3 = -0{,}61805$; $x_4 = -4{,}73205$. Приближенные значения корней позволяют высказать предположение, что $x_1 + x_3 = 1$, $x_1 x_3 = -1$, $x_2 + x_4 = -6$, $x_2 x_4 = 6$. Если эта гипотеза верна, то $x_1 = 0{,}5(1 + \sqrt{5})$; $x_2 = -3 + \sqrt{3}$; $x_3 = 0{,}5(1 - \sqrt{5})$; $x_4 = -3 - \sqrt{3}$. Проверкой убеждаемся, что гипотеза верна.

Задача 4. Решить уравнение $F(x) = 3^{\sqrt{2}x} - 4x^2 - 1$.

Это уравнение равносильно уравнениям $3^{\sqrt{2}x} = 4x^2 + 1$ и $\sqrt{2}x \ln 3 = \ln(4x^2 + 1)$. Пусть $P(x) = \sqrt{2}x \ln 3 - \ln(4x^2 + 1)$. Находим корни уравнения $P'(x) = 0$: $x' = 0{,}23833665$, $x'' = 1{,}048936$. Находим, $F(x') > 0$; $F(x'') < 0$; $F(0) = 0$; $F(1) < 0$; $F(2) > 0$. Теперь ясно, что данное уравнение имеет три корня: x_1, x_2, x_3, причем $x_1 = 0$, $x' < x_2 < 1$, $x'' < x_3 < 2$. После уточнения корней x_2 и x_3 получаем: $x_2 = 0{,}707106$; $x_3 = 1{,}414214$. Нетрудно догадаться, что $x_2 = 0{,}5\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$.

Задача 5. Решить уравнение $\lg(x^2 + 9) - 3 \cdot 2^x + 5 = 0$.

Отрицательных корней уравнение не имеет, потому что на $(-\infty;\ 0)$ функция $P(x) = \lg(x^2 + 9) + 5$ убывает, $K(x) = 3 \cdot 2^x$ возрастает и $P(0) > K(0)$. Для

Таблица 10.8

x	$P(x)$	$K(x)$	x	$P(x)$	$K(x)$
0	5,954	3	1,6	6,062	9,09
0,2	5,956	3,45	1,8	6,087	10,4
0,4	5,961	3,93	2	6,113	12
0,6	5,971	4,55	2,2	6,141	13,8
0,8	5,984	5,22	2,4	6,169	15,8
1	6	6	2,6	6,197	18,2
1,2	6,018	6,89	2,8	6,226	20,9
1,4	6,039	7,92	3	6,255	24

Таблица 10.9

x	$P'(x)$	$K'(x)$	x	$P'(x)$	$K'(x)$
0,8	0,072	3,6	1,1	0,093	4,4
0,9	0,079	3,8	1,2	0,099	4,7
1	0,080	4,1			

получения гипотезы о числе корней данного уравнения составляем таблицу функций $P(x)$ и $K(x)$ (табл. 10.8).

Теперь можно предположить, что если $x > 2$, то $\lg(x^2+9) < 2^x$ (это неравенство легко доказывается с помощью производной). После этого становится ясно, что все корни данного уравнения принадлежат $[0;\ 2]$. Число 1 является корнем уравнения. Из таблицы видно, что отрезкам $[0;\ 0,8]$ и $[1,2;\ 2]$ не могут принадлежать корни уравнения. Для доказательства того, что 1 является единственным корнем рассматриваемого уравнения, составляем таблицу функций $P'(x)$ и $K'(x)$ (табл. 10.9).

З а д а ч а 6. Найти корни уравнения $F(x) = 2^{2x} - 5\cdot 3^x + 29 = 0$ (с точностью до 0,01).

Это уравнение равносильно уравнениям $4^x + 29 = 5\cdot 3^x$ и $\ln(4^x + 29) = \ln 5 + x\ln 3$. Пусть $P(x) = \ln(4^x + 29) - x\ln 3 - \ln 5$. Решив уравнение $P'(x) = 0$, получим $4^x = 29\ln 3 : \ln(4/3)$. Отсюда $x\ln 4 = \ln(29\ln 3 : \ln(4/3))$ и $x_0 = 3{,}395578$ (корень x_0 уравнения $P'(x) = 0$ получен на микрокалькуляторе). Находим $F(x_0) = -68{,}73277$; $F(0) = 29$; $F(6) = 480$. Теперь ясно, что уравнение $F(x) = 0$ имеет два корня. Причем $x_1 = 2$, $x_0 < x_2 < 6$. После уточнения получаем $x_2 = 5{,}55$ $(\pm 0{,}01)$.

З а д а ч а 7. Найти корни уравнения $\sqrt[4]{\sqrt{2}x - 1} + 9 = 10\lg(x^4 + 6)$ (с относительной погрешностью не выше 0,01 %).

Уравнение определено на $[0{,}5\sqrt{2};\ +\infty)$. Функции $P(x) = \sqrt[4]{\sqrt{2}x - 1} + 9$ и $K(x) = 10\lg(x^4 + 6)$ возрастающие. Для получения гипотезы о числе корней уравнения $P(x) = K(x)$ составим таблицу функции $F(x) = P(x) - K(x)$

Таблица 10.10

x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$
$0{,}5\sqrt{2}$	1,04	100	−68	10^7	−209
1	1,35	200	−79	$5\cdot10^7$	−207
2	−3,26	500	−94	$9\cdot10^7$	−203
3	−9,05	10	−104	10^8	−202
5	−17	$2\cdot10^3$	−115	10^9	−157
10	−29	$5\cdot10^3$	−129	10^{10}	−46
15	−36	10^4	−140	10^{11}	182
20	−41	$2\cdot10^4$	−150	10^{12}	619
30	−48	$5\cdot10^4$	−162	10^{13}	1428
40	−52	10^5	−171	10^{14}	2897
50	−56	10^6	−196		

(табл. 10.10).

Примерная программа вычисления значений функции $F(x)$ на микрокалькуляторе "Электроника БЗ-34":

ИП1 2 F$\sqrt{\ }$x1 − F$\sqrt{\ }$ F$\sqrt{\ }$ 9 + П2 ИП1 Fx^2 Fx^2 6 +

+ F lg 10^x /−/ ИП2 + .

Предполагаем, что уравнение $P(x) = K(x)$ имеет два корня: $1 < x_1 < 2$, $10^{10} < x_2 < 10^{11}$. Попытаемся доказать эту гипотезу. Из табл. 10.10 можно заключить, что $F(x)$ на $[5\cdot10^7; +\infty)$ возрастает. Для доказательства утверждения достаточно показать, что на этом промежутке верно неравенство $P'(x) > K'(x)$. Находим:

$$P'(x) = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt[4]{(\sqrt{2}x-1)^3}}; \quad K'(x) = \frac{10}{\ln 10}\,\frac{4x^3}{x^4+6}.$$

Очевидно, что верны неравенства:

$$P'(x) > \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt[4]{(\sqrt{2}x)^3}}; \quad K'(x) < \frac{10}{\ln 10}\,\frac{4}{x}.$$

Решив неравенство $\dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt[4]{(\sqrt{2}x)^3}} > \dfrac{10}{\ln 10}\,\dfrac{4}{x}$, получим $x \geqslant 16485500$.

Отсюда ясно, что на $[16485500; +\infty)$ функция $F(x)$ возрастает, следовательно, на этом промежутке существует единственный корень x_2 уравнения $P(x) = K(x)$. После уточнения получаем $x_2 = 1{,}83921\cdot10^{10}$.

Заметим, что функция $P'(x)$ убывающая. Функция $K'(x)$ возрастает на $[0{,}5\sqrt{2};\ x_0]$ и убывает на $[x_0;\ +\infty)$ $(2 < x_0 < 3)$.

Составляем таблицу функций $P'(x)$ и $K'(x)$ (табл. 10.11).

Анализ табл. 10.11 (методом "ступенек") показывает, что на отрезке $[1;\ 10^7]$ верно неравенство $P'(x) < K'(x)$. А это означает, что функция $F(x)$ на этом отрезке убывает. Поэтому отрезку $[1;\ 10^7]$ принадлежит единственный корень x_1 данного уравнения. С помощью микрокалькулятора получаем $x_1 = \sqrt{2}$.

Осталось доказать, что других корней уравнение не имеет. Для этого составляем таблицу функций $P(x)$ и $K(x)$ (табл. 10.12).

Задача 8. Решить уравнение $\arcsin 2x + \arcsin x = \pi/3$.

1. Так как функция $\arcsin x$ определена на $[-1;\ 1]$, то функция $\arcsin 2x$ определена на $[-0{,}5;\ 0{,}5]$. Поэтому монотонная (возрастающая) и непрерывная функция $f(x) = \arcsin 2x + \arcsin x$ определена на $[-0{,}5;\ 0{,}5]$. Находим:

$$f(-0{,}5) = \arcsin(-1) + \arcsin(-0{,}5) = -\pi/2 - \pi/6 = -2\pi/3;$$

$$f(0{,}5) = \arcsin 1 + \arcsin 0{,}5 = \pi/2 + \pi/6 = 2\pi/3.$$

Таблица 10.11

x	$P'(x)$	$K'(x)$	x	$P'(x)$	$K'(x)$
1	0,684	2,48	10^6	$8{,}62\cdot10^{-6}$	$1{,}7\cdot10^{-5}$
10	0,051	1,74	$2\cdot10^6$	$5{,}12\cdot10^{-6}$	$8{,}7\cdot10^{-6}$
20	0,03	0,87	$3\cdot10^6$	$3{,}78\cdot10^{-6}$	$5{,}8\cdot10^{-6}$
100	$8{,}66\cdot10^{-3}$	0,17	$4\cdot10^6$	$3{,}05\cdot10^{-6}$	$4{,}3\cdot10^{-6}$
500	$2{,}58\cdot10^{-3}$	0,035	$5\cdot10^6$	$2{,}57\cdot10^{-6}$	$3{,}4\cdot10^{-6}$
$5\cdot10^3$	$4{,}58\cdot10^{-4}$	$3{,}4\cdot10^{-3}$	$6\cdot10^6$	$2{,}24\cdot10^{-6}$	$2{,}9\cdot10^{-6}$
$2\cdot10^4$	$1{,}62\cdot10^{-4}$	$8{,}7\cdot10^{-4}$	$7\cdot10^6$	$2{,}00\cdot10^{-6}$	$2{,}5\cdot10^{-6}$
10^5	$4{,}85\cdot10^{-5}$	$1{,}7\cdot10^{-4}$	$8\cdot10^6$	$1{,}81\cdot10^{-6}$	$2{,}2\cdot10^{-6}$
$2\cdot10^5$	$2{,}88\cdot10^{-5}$	$8{,}7\cdot10^{-5}$	$9\cdot10^6$	$1{,}66\cdot10^{-6}$	$1{,}9\cdot10^{-6}$
$4\cdot10^5$	$1{,}71\cdot10^{-5}$	$4{,}3\cdot10^{-5}$	10^7	$1{,}53\cdot10^{-6}$	$1{,}7\cdot10^{-6}$
$7\cdot10^5$	$1{,}13\cdot10^{-5}$	$2{,}5\cdot10^{-5}$			

Таблица 10.12

x	$P(x)$	$K(x)$	x	$P(x)$	$K(x)$
$0{,}5\sqrt{2}$	9	7,96	10^7	70,33	280
1	9,8	8,45	$1{,}7\cdot10^7$	79,03	289

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0	0	0,3279	1,0470982
0,5	2,0943951	0,32735	1,0472834
0,3	0,9481938	0,32733	1,0472093
0,35	1,1329686	0,32732	1,0471723
0,33	1,0571224	0,327325	1,0471908
0,328	1,0496925	0,327327	1,0471982
0,327	1,0459873	0,3273265 .	1,0471963
0,3275	1,0478391		

Теперь понятно, что данное уравнение имеет единственный корень x_1, причем $0 < x_1 < 0{,}5$.

С помощью микрокалькулятора найдем приближенное значение x_1 с точностью до 10^{-6}. Для этого составим таблицу значений функции $f(x)$ (табл. 10.13). Заметим, что $\pi/3 \approx 1{,}0471975$.

Ответ. $x_1 \approx 0{,}3273227$.

2. Находим косинус обеих частей данного уравнения: $\cos(\arcsin 2x + \arcsin x) = \cos(\pi/3)$. Отсюда $\sqrt{1-4x^2}\,\sqrt{1-x^2} - 2x\cdot x = 0{,}5$. Решив это иррациональное уравнение, получим: $x_1 = 0{,}5\sqrt{3/7}$, $x_2 = -0{,}5\sqrt{3/7}$.

Полученное решение нуждается в проверке. Обозначим $\alpha = \arcsin 2x_1 + \arcsin x_1$. Тогда $\cos\left(\arcsin\sqrt{\frac{3}{7}} + \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right)\right) = \cos\alpha$ и $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{3}{7}}\sqrt{1-\frac{1}{4}\,\frac{3}{7}} - \sqrt{\frac{3}{7}}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$, т.е. $\cos\alpha = 0{,}5$.

Так как $0 < \sqrt{\frac{3}{7}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $0 < \arcsin\sqrt{\frac{3}{7}} < \frac{\pi}{4}$ и $0 < \arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} < \frac{\pi}{4}$. Но тогда $0 < \arcsin\sqrt{\frac{3}{7}} + \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right) < \frac{\pi}{2}$, т.е. α принадлежит первой четверти.

Итак, $\cos\alpha = 1/2$ и $0 < \alpha < \pi/2$, но в таком случае $\alpha = \pi/3$, и $x_1 = 0{,}5\sqrt{3/7}$ — корень данного уравнения.

Проверим, является ли x_2 корнем уравнения. Обозначим $\beta = \arcsin 2x_2 + \arcsin x_2$. Отсюда $\arcsin\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right) = \beta$.

Так как $-1 < -\sqrt{\frac{3}{7}} < 0$ и $-1 < -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} < 0$, то $-\pi < \arcsin\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right) < 0$, или $-\pi < \beta < 0$. Следовательно, $\beta \neq \pi/3$. Поэтому x_2 не является корнем данного уравнения.

Ответ. $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} \approx 0{,}32732683$.

11. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

11.1. Сущность и особенности задач лабораторного типа

Элементы геометрических фигур, данные в условии задачи, можно рассматривать как точные или приближенные величины. При первом условии задачу можно решать только вычислением, так как точные данные предполагают получение точных ответов. В этом случае не может быть и речи о решении таких задач построением или сочетанием построений и вычислений, потому что построения и последующие измерения всегда ведутся приближенно.

Иногда есть возможность проверить вычисления построением. В таких случаях приближенный результат в какой-то степени дает возможность судить о правильности решения задачи вычислением (по точным данным).

Если данные задачи — результат инструментальных измерений, то они всегда являются приближенными числами. Результат решения такой задачи — также приближенное число. Поэтому в принципе можно получить ответ не только вычислением, но и построением. Следовательно, задачи такого рода предоставляют учащимся большую возможность выбора наиболее простого решения. Но при этом необходимо, чтобы избранный путь позволял получить решение с необходимой точностью, которая определяется точностью исходных данных.

Если для решения одной и той же задачи используются вычисления, инструментальные построения и измерения, такой метод решения будем называть расчетно-графическим.

11.2. Содержание задач лабораторного типа

Содержание задач лабораторного типа составляют:

определение величины элементов геометрической фигуры, заданной приближенными числами;

непосредственное и косвенное определение величин плоских углов готовых моделей различных фигур и двугранных углов пространственных моделей с помощью транспортира, циркуля, масштабной линейки, поперечного масштаба, чертежного угольника, малки; определение величины угла наклона отрезков к плоскости и угла между двумя скрещивающимися прямыми;

непосредственное и косвенное измерение линейных элементов моделей с помощью различных измерительных инструментов;

определение площадей моделей двухмерных фигур, площадей поверхностей многогранников и круглых тел и их сечений;

определение объемов моделей геометрических тел;

построение моделей плоских и пространственных фигур или их разверток;

построения на готовых моделях и развертках, которые могут выполняться для упрощения решения задачи на определение элементов модели или развертки, а также при решении конструктивных задач;

преобразование разверток пространственных фигур (с целью развития пространственного воображения).

11.3. Способы задания условий задач лабораторного типа

Условие задачи лабораторного типа может быть задано одним из рассмотренных ниже способов.

1. Приближенными числовыми значениями линейных элементов и углов геометрической фигуры.

Примеры: а) основание треугольника $a \approx 100$ мм, $\angle A \approx 55^\circ$, $\angle B \approx 117^\circ$. Найти его боковые стороны;

б) построить развертку треугольной призмы, площадь каждой грани которой $20\ см^2$.

2. Моделью плоской или пространственной фигуры.

Примеры: а) дана модель наклонной треугольной призмы. Определить ее высоту. Построить развертку;

б) дана модель прямого параллелепипеда. Какие элементы ее нужно измерить для вычисления угла наклона диагонали этого параллелепипеда к плоскости его основания?

в) дана часть шаровой поверхности (произвольной формы). Какие дополнительные построения на ней нужно выполнить для определения ее диаметра?

г) дана модель куба. На его поверхности указаны три точки, не принадлежащие одной грани. Построить на этой модели отрезки, по которым плоскость, проходящая через данные точки, пересекает поверхность куба;

д) дана модель параллелограмма. Построить развертку прямого параллелепипеда, основанием которого служит данная модель, а одна из его диагоналей равна одной из диагоналей данной модели.

3. Моделью и некоторыми числовыми характеристиками.

Пример. Дана модель треугольника (один из его углов меньше 60°). Эта модель служит основанием пирамиды, одно из боковых ребер которой равно наименьшей из сторон основания и образует со сторонами основания углы по 150° каждый. Найти ее высоту.

4. Разверткой пространственной фигуры.

Примеры: а) дана развертка пирамиды. Определить объем этой пирамиды;

б) дана развертка куба. Построить другие развертки этого же куба.

5. Частью развертки пространственной фигуры.

Примеры: а) даны три модели треугольников, которые являются гранями некоторой треугольной пирамиды. Найти стороны четвертой грани этой пирамиды.

Примечание. При решении этой и аналогичных задач должна быть указана максимальная погрешность измерения элементов данной модели. Так, например, если при измерении миллиметровой линейкой сторон некоторой модели треугольника получено: $a \approx 50{,}5$ ($\pm 0{,}5$) мм, $b \approx 52{,}0$ ($\pm 0{,}5$) мм, $c \approx 49{,}5$ ($\pm 0{,}5$) мм, ее следует считать моделью равнобедренного треугольника ($a \approx c$);

б) на чертеже даны две части одной развертки некоторого куба (каждая из данных частей представляет некоторую совокупность трех одинаковых квадратов). Составить из них развертку куба (данные части перекраивать не разрешается).

6. Частью развертки и некоторыми числовыми данными.

Пример. Даны две грани трехгранного угла, которые образуют двугранный угол 40°. Построить третью грань этого угла.

11.4. Ошибки в вычислениях

Рассмотрим два решения одной задачи.

Задача 1. Даны три числа a, b, c. Можно ли их принять за длины сторон треугольника? Определить его вид и вычислить элементы (углы, площадь, высоты, медианы, биссектрисы, радиусы описанной и вписанной окружностей).

1. Задача решается в общем виде с применением тригонометрических функций острого угла и использованием всех теорем, изученных в разделе "Метрические соотношения в треугольнике". При решении числовых примеров этой же задачи были использованы приближенные вычисления. Если значения a, b, c выражены двузначными числами, вычисления выполняются на счетной линейке, если же для a, b, c даны трехзначные числовые значения, вычисления проводятся с помощью таблиц Брадиса.

Данные значения a, b, c располагаются в убывающем порядке. Пусть $a > b > c$. Если $a < b + c$, то существует треугольник, длины сторон которого равны соответственно a, b, c.

На основании теоремы косинусов определяют вид треугольника. Для этого сравнивают квадраты сторон: a^2 и $b^2 + c^2$. Если $a^2 < b^2 + c^2$, треугольник остроугольный, если $a^2 = b^2 + c^2$, – прямоугольный, если $a^2 > b^2 + c^2$, – тупоугольный. В последнем случае тупым является угол A как угол, лежащий против большей стороны.

По формуле Герона вычисляют площадь треугольника.

По формуле $R = abc/(4S)$ вычисляют радиус описанной около треугольника окружности.

По формуле $H_a = bc/(2R)$ или $H_a = 2S/a$ вычисляют высоту H_a, опущенную на бо́льшую сторону (рис. 11.1, $H_a = AD$). Аналогично вычисляются H_b и H_c. После этого находят углы треугольника. Так как B и C – острые углы, каждый из них можно вычислить с помощью H_a. Действительно, $\sin B = H_a/c$, $\sin C = H_a/b$. Угол A, если он тоже острый, вычисляется по аналогичной формуле $\sin A = H_b/c$ или $\sin A = H_c/b$. Если же угол A тупой, то по указанным формулам вычисляется синус угла $180° - A$. В этом случае угол A проще вычислить вычитанием из π угла $B + C$. Для остроугольного треугольника целесообразно все углы вычислить через функции синуса, а формулу $A + B + C = 180°$ использовать как контрольную.

Находят радиус вписанной в треугольник окружности: $r = S/p$, где p – полупериметр.

Вычисляют три медианы треугольника:

$$m_a = 0{,}5\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}\ ;\ m_b = 0{,}5\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}\ ;$$

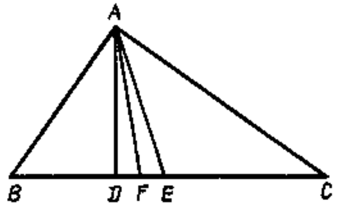


Рис. 11.1

$$m_c = 0{,}5\sqrt{2\,(a^2+b^2) - c^2}.$$

Получают три биссектрисы углов треугольника:

$$l_A^2 = bc - x_a y_a;\ l_B^2 = ac - x_b y_b;\ l_C^2 = ab - x_c y_c,$$

где x, y — отрезки стороны, лежащей против угла, на которые эту сторону делит биссектриса.

Приведем числовой пример: 12, 16, 24. Можно ли считать эти числа длинами сторон треугольника, и если можно, то вычислить все основные элементы треугольника, принимая данные числа за приближенные значения длин этих сторон:

1) $24 < 12 + 16$, следовательно, треугольник существует.

Пусть $a \approx 24$, $b \approx 16$, $c \approx 12$;

2) сравним квадраты сторон: $a^2 \approx 576$, $b^2 + c^2 \approx 400$, т.е. $a^2 > b^2 + c^2$; треугольник тупоугольный, $90° < A < 180°$;

3) вычисляем площадь треугольника*: $2p \approx 52$; $p \approx 26$; $p - a \approx 2$; $p - b \approx 10$ и $p - c \approx 14$; $S \approx \sqrt{26 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 14} = 4\sqrt{455} \approx 85{,}3$; $S \approx 85$;

4) находим радиус описанной окружности: $R \approx \dfrac{24 \cdot 16 \cdot 12}{4 \cdot 85{,}3} \approx 13{,}6$, $R \approx 14$;

5) вычисляем $H_a \approx 16 \cdot 12/27{,}2 \approx 7{,}06$, $H_a \approx 7{,}1$;

6) определяем углы B и C:

$\sin B \approx 7{,}06/12 \approx 0{,}5883$, $B \approx 36°2'$, $B \approx 36°$;
$\sin C \approx 7{,}06/16 \approx 0{,}4413$, $C \approx 26°11'$, $C \approx 26°$;
$A \approx 180° - (36° + 26°) \approx 118°$;

7) $r \approx 85{,}3/26 \approx 3{,}28 \approx 3{,}3$;

8) $m_a \approx 0{,}5\sqrt{2 \cdot 400 - 576} \approx 7{,}65$, $m_a \approx 7{,}7$;

9) вычисляем биссектрису угла B треугольника: $l_B^2 \approx 24 \cdot 12 - x_b y_b$. Найдем x_b и y_b. Имеем систему уравнений $x_b + y_b = 16$ и, согласно свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника, $x_b/a = y_b/c$. Из второго уравнения $x_b/y_b = 2$, т.е. $x_b = 2y_b$. Следовательно, $y_b \approx 5{,}3$ и $x_b \approx 10{,}7$. Таким образом, $l_B^2 \approx 288 - 5{,}3 \cdot 10{,}7 \approx 288 - 57 \approx 231$ и $l_B \approx 15{,}2 \approx 15$.

---

* При вычислениях в промежуточных результатах удерживалась запасная цифра. Окончательные числовые значения даны с двумя значащими цифрами.

Интересно отметить, что если решать этот треугольник с помощью формул тангенсов половинных углов и вычисления проводить с помощью таблиц Брадиса, получим: $A \approx 117°16'$, $B \approx 36°20'$, $C \approx 26°22'$. Используя формулу Герона и таблицы логарифмов, находим $S \approx 85$.

Вычисляя элементы треугольника способом подсчета цифр, окончательные числовые значения получаем с числом значащих цифр, равным числу цифр в исходных данных задачи. Но какова точность этих вычислений? Какова хотя бы вероятность того, что эти результаты можно применить на практике? И возможно ли без громоздких дополнительных вычислений в какой-то степени оценить точность результата?

Ответить на эти вопросы можно, решив задачу способом границ.

2. Если $a \approx 24\ (\pm 0{,}5)$, $b \approx 16\ (\pm 0{,}5)$, $c \approx 12\ (\pm 0{,}5)$, то вычисляя элементы треугольника по способу границ (с помощью тех же формул, которые использовались и в первом решении), получаем:

способ границ	*способ подсчета цифр*
$77{,}5 \leqslant S \leqslant 93{,}5$;	$S \approx 85$;
$12{,}3 \leqslant R \leqslant 15{,}9$;	$R \approx 14$;
$5{,}6 \leqslant H_a \leqslant 8{,}3$;	$H_a \approx 7{,}1$;
$29°10' \leqslant B \leqslant 42°$;	$B \approx 36°$;
$21°10' \leqslant C \leqslant 30°20'$;	$C \approx 26°$;
$107°30' \leqslant A \leqslant 129°40'$;	$A \approx 118°$;
$3{,}04 \leqslant r \leqslant 3{,}49$;	$r \approx 3{,}3$;
$6{,}02 \leqslant m_a \leqslant 8{,}75$;	$m_a \approx 7{,}7$;
$14{,}5 \leqslant l_B \leqslant 15{,}9$;	$l_B \approx 15$.

Из сказанного можно сделать вывод, что к любому результату, полученному при решении геометрической задачи на вычисление, заданной приближенными числовыми значениями (если вычисления велись способом подсчета цифр), следует относиться с очень малой степенью доверия.

Расчетно-графическое решение задач лабораторного типа по геометрии, как будет показано ниже, дает результаты практически с той же точностью, что и "чистые" вычисления даже с использованием четырехзначных таблиц. Если же мы хотим не просто получить результат, но и знать его точность, вычисления необходимо вести по способу границ. Чтобы облегчить такие вычисления и получить точные нижние и верхние границы результата, необходимо знание некоторых зависимостей между нижними и верхними границами данных и вычисленных элементов треугольников (табл. 11.1). Для доказательства этих зависимостей используется аппарат дифференциального исчисления.

На примере поясним, как пользоваться табл. 11.1 при решении треугольников по способу границ.

Дано: $a \approx 24\ (\pm 0{,}5)$, $b \approx 16\ (\pm 0{,}5)$, $c \approx 12\ (\pm 0{,}5)$. Вычислить по способу границ длину биссектрисы l_B.

Треугольник задан тремя сторонами. Поэтому используем табл. 11.1 (I). В столбце l_B находим m и в строке на пересечении со столбцами a, b и c находим m, M, m. Это означает, что точная нижняя граница l_B соответствует

m	m	m		m	m						
M	m	m	M m m	M/m^1	m		m		m	m^* m^*	$^*A$ – тупой, ^1M – A – тупой m – A – острый
m	M	m				m	m			m^*	$^*A$ – острый
m	m	M					m	m		m^*	$^*A$ – острый

II. *Треугольник задан сторонами a, c и* $\angle A$ $(A > 90^\circ)$

m | m m m | m m m m m

m	m	m
m	M	M
M	m	M
m	m	M

m m

m m

m m m m m

III. *Треугольник задан сторонами b, c и* $\angle A$ $(A \leqslant 90^\circ)$

m^*	m	m	m		m m^* m m m m m	$^*B < 90^\circ$, $C < 90^\circ$
M^*	m	M	M	m	m^* M	$^*B < 90^\circ$, $C > 90^\circ$
M^*	M	m	M	m	m^* M	$^*B > 90^\circ$, $C < 90^\circ$
	m	m	M		m m m	

IV. *Треугольник задан сторонами a, b и* $\angle A$ $(A > 90^\circ,\ a > b)$

a	b	c	A	B	C	S	R	r	t_A	t_B	t_C	m_a	m_b	m_c	h_a	h_b	h_c	Примечание
m	*M*	*m*	*M*		*m*	*m*			*m*	*m*		*m*	*m*		*m*	*m*		
M	*m*		*M*	*m*			*M*	*M*										
m	*m*		*M*														*m*	
V. *Треугольник задан сторонами a, b и* $\angle A$ $(A < 90^\circ, C > 90^\circ)$																		
m	*m*		*m*			*m*		*m*			*m*			*m*		*m*	*m*	
m	*M*		*M*	*M*	*m*										*M*			
m	*m*	*m*	*M*				*m*		*m*	*m*		*m*	*m*					
VI. *Треугольник задан сторонами a, b и* $\angle A$ $(A < 90^\circ, B > 90^\circ)$																		
m	*m*		*m*														*m*	
m	*M*	*M*	*M*	*m*	*M*	*M*		*M*	*M*	*m*	*M*	*M*	*M*		*M*	*M*		
m	*m*		*M*				*m*							*m*				
VII. *Треугольник задан сторонами a, b и* $\angle A$ $(A, B, C < 90^\circ)$																		
m	*m*		*m*			*m*		*m*									*m*	
m	*M*	*m*	*M*	*M*	*m*					*m*	*M*	*M*	*m*	*M*		*m*		
M	*m*		*M*				*M*								*m*			
m	*m*		*M*						*m*									

VIII. *Треугольник задан стороной c и $\angle A$ и $\angle B$ ($A, B, C < 90°$)*

m	*m*	*m*	*m*	*m*	*M*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*

IX. *Треугольник задан стороной c и $\angle A$ и $\angle B$ ($C > 90°$)*

		m	*m*	*m*	*M*	*m*		*m*	*m*	*m*	*m*			*m*	*m*	*m*	*m*
		m	*M*	*M*			*m*										
	M	*M*	*m*	*M*								*M*					
m		*m*	*m*	*M*									*m*				

X. *Треугольник задан стороной c и $\angle A$ и $\angle B$ ($\angle A > 90°$)*

m	*m*	*m*	*m*	*m*	*M*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*		*m*
		m	*M*	*m*												*m*	

точным нижним границам значений сторон a и c и точной верхней границе стороны b. Точная верхняя граница l_B соответствует точным верхним границам значений сторон a и c и точной нижней границе стороны b.

Известно, что $l_B = \dfrac{\sqrt{ac\,((a+c)^2 - b^2)}}{a+c}$. Поэтому

$$l_{B_M} = \frac{\sqrt{24{,}5 \cdot 12{,}5\,((24{,}5+12{,}5)^2 - 15{,}5^2)}}{24{,}5+12{,}5} = 15{,}9;$$

$$l_{B_m} = \frac{\sqrt{23{,}5 \cdot 11{,}5\,((23{,}5+11{,}5)^2 - 16{,}5)}}{23{,}5+11{,}5} = 14{,}5.$$

Тогда $l_B \approx \dfrac{l_{B_m} + l_{B_M}}{2}\ (\pm\Delta)$, где $\Delta = \dfrac{l_{B_M} - l_{B_m}}{2}$.

11.5. Определение масштаба чертежа при решении задач построением

Для того чтобы результат, полученный в процессе решения задачи построением, удовлетворял требуемой точности, необходимо предварительно определить масштаб чертежа.

З а д а ч а 1. Стороны треугольника равны приближенно 120; 145; 102 мм. Найти построением с точностью до 0,8 % (по сравнению с расчетным результатом) величину медианы, проведенной к наибольшей стороне.

Обозначим искомую медиану x. Напомним, что под Δ понимается максимальная абсолютная ошибка определения длины отрезка построением. По условию задачи 0,8 % от x должно быть не меньше Δ, т.е. $0{,}008x \geqslant \Delta$. Отсюда $x \geqslant \Delta/0{,}008$. Если $\Delta = 0{,}5$ мм, то $x \geqslant 62{,}5$ мм. Если $\Delta = 1$ мм, то $x \geqslant 125$ мм.

Строим данный треугольник в масштабе 1:1 (с помощью циркуля и миллиметровой линейки). Измерение миллиметровой линейкой показывает, что искомая медиана равна примерно 85 мм ($\pm\Delta$). Следовательно, если $\Delta = 0{,}5$ мм, то выбранный масштаб обеспечивает требуемую точность результата, так как $85 > 62{,}5$.

Если $\Delta = 1$ мм, требуемый масштаб определяется так. Отрезок в этом масштабе должен быть больше 125 мм. Таким образом, необходимо определить, чему равно отношение 125:85. Оно меньше 1,5, поэтому, если $\Delta = 1$ мм, мы с необходимой точностью определим длину медианы на чертеже в масштабе 1,5:1. Так можно объяснить решение этой задачи учащимся 7—8 классов. Со старшеклассниками ее можно решать по-другому.

Строим данный треугольник в масштабе 1:1. При измерении миллиметровой линейкой видим, что искомая медиана равна примерно 85 мм ($\pm\Delta$). Но 0,8 % от 85 мм меньше, чем 0,7 мм. Если $\Delta = 0{,}5$ мм, этот масштаб обеспечивает требуемую точность результата, так как $0{,}5/0{,}7 < 0{,}8 < 1$. Если же $\Delta = 1$ мм, то $1/0{,}7 < 1{,}5$ (вместо отношения 1:0,7 берем 1,5:1 как одно из наиболее удобных для вычислений и мало отличающихся от 1:0,7). Поэтому ответ с требуемой точностью получаем, если построим данный треугольник в масштабе 1,5:1.

З а д а ч а 2. Четырехугольник $ABCD$ имеет следующие размеры: $AB \approx \approx 106$ см, $BC \approx 88$ см, $CD \approx 117$ см, $AD \approx 92$ см, $AC \approx 43$ см. Определить построением длину диагонали BD с точностью до 0,2 см (по сравнению с расчетным результатом).

Строим четырехугольник в масштабе 1:10 (как два треугольника с данными сторонами). В результате измерения получаем $BD \approx 197$ мм ($\pm \Delta$). Если $\Delta = 0{,}5$ мм, то $0{,}5/0{,}2 = 2{,}5$, поэтому масштаб 1:4 обеспечивает получение результата с требуемой точностью.

З а д а ч а 3. У треугольника ABC сторона $AB \approx 6{,}2$ мм, $BC \approx 21{,}6$ мм, $\angle B \approx 18°20'$. Найти построением сторону AC.

Строим этот треугольник в масштабе 10:1 (для простоты вычислений). Получаем $AC \approx 158$ мм ($\pm \Delta$) – в масштабе 10:1.

Ответ. $AC \approx 15{,}8$ ($\pm 0{,}1\Delta$).

11.6. Эффективность решения геометрических задач различными методами

Выбор метода решения конкретной задачи (в том числе и задач лабораторного типа) определяется заданной точностью исходных данных задачи и конечного результата, методической целью решения задачи, наличием чертежных и измерительных инструментов и т.п. Для решения задачи лабораторного типа могут быть использованы следующие методы: вычисления по точным геометрическим формулам; вычисления по точным и приближенным геометрическим формулам; построения с помощью циркуля и масштабной линейки; построения в сочетании с вычислениями по точным и приближенным геометрическим формулам; построения с использованием графиков функций.

Без вычислений нельзя, как правило, обойтись в том случае, когда нужно вывести формулу, которая выражает искомое через данные величины, т.е. когда нужно получить решение в общем виде. Применение точных или приближенных геометрических формул зависит от заданной точности конечного результата.

Построением можно определять линейные элементы и углы плоских фигур, а также линейные элементы, плоские и двугранные углы многогранников. Однако применение одного только графического метода нецелесообразно, если нужно получить конечный результат с довольно высокой точностью. В таком случае придется выбирать такой масштаб чертежа, использовать который не всегда возможно.

Применение той или иной приближенной геометрической формулы определяется точностью конечного результата и степенью точности формулы, а также возможностью непосредственного измерения тех элементов фигуры, которые с помощью этой формулы позволяют получить искомый результат. Использование приближенных геометрических формул в сочетании с построениями упрощает решение задач лабораторного типа на определение длин дуг окружности, площадей круговых сегментов, поверхности шарового сегмента и поверхности шарового слоя, объема части цилиндра или шарового слоя.

Преобладание в расчетно-графическом методе вычислений или построений зависит от сложности задачи, точности ответа, конкретных числовых данных, методической цели решения задачи, теоретической подготовки учащихся.

Использование расчетно-графического метода развивает инициативу учащихся, так как требование решить задачу наиболее простым способом заставляет сравнивать различные пути получения результата.

11.7. Обучение решению задач лабораторного типа расчетно-графическим методом

Решение задачи лабораторного типа связано с определением или построением одних приближенных геометрических элементов по другим (данным) приближенным величинам. Поэтому обучение решению этих задач включает четыре основных этапа: а) фактическое и аккуратное выполнение основных геометрических построений; б) привитие навыков применения правил приближенных вычислений, таблиц, логарифмической линейки, микрокалькулятора; в) решение задач с помощью вычислений и основных геометрических построений; г) ознакомление с различными методами решения задач лабораторного типа и приближенными геометрическими формулами.

Идеальным результатом анализа задачи лабораторного типа должна быть простота ее решения и получение ответа с необходимой точностью. Но эти два требования в известной степени противоречат друг другу. Увеличение числа графических операций, как правило, упрощает решение, но вместе с тем ухудшает точность результатов. Если с помощью построений определяется больше одного промежуточного результата, то каждый из них нужно определять с точностью более высокой, чем конечный результат. Это затрудняет определение масштаба чертежа и в конечном итоге намного усложняет решение задачи. Поэтому анализ решения задачи лабораторного типа расчетно-графическим методом должен начинаться с выяснения того, какой элемент геометрической фигуры (только один!) можно определить построением с той точностью (или более высокой), с какой необходимо найти и конечный результат. Причем определение этого элемента построением должно значительно упростить дальнейшее решение задачи вычислением.

Выбор рационального решения задачи лабораторного типа, условие которой задано приближенными числами, зависит от конкретного соотношения между величинами данных элементов. Поэтому первым этапом решения таких задач является уяснение формы данной геометрической фигуры.

По содержанию все задачи лабораторного типа, решаемые расчетно-графическим методом, могут быть разделены на несколько групп. Рассмотрим особенности содержания задач каждой группы и особенности методики обучения их решению.

К первой группе относятся задачи, для решения которых используется единственное понятие или теорема без дополнительных построений на данных моделях или развертках, без каких-либо инструментальных преобразований разверток или их частей (воображаемое перемещение отдельных частей развертки присуще всем задачам лабораторного типа с применением разверток). Непосредственное измерение линейных элементов или углов фигуры является единственным источником и единственной операцией для получения ответа на поставленный вопрос.

П р и м е р. Найти среди данных моделей модель правильной треугольной пирамиды.

Задачи первой группы дают учителю возможность быстро проверить правильность усвоения одного понятия или свойства геометрической фигуры или группы фигур, связанных каким-либо общим признаком понятий или свойств. Так, например, при изучении темы "Четырехугольники" правильность усвоения понятий и свойств различных видов четырехугольников может быть проверена с помощью следующего упражнения. Даны бумажные модели (или чертежи) некоторых четырехугольников. Найти среди них косоугольный параллелограмм (прямоугольник, ромб, квадрат, трапецию). Если необходимо проверить усвоение определенного признака одного из видов четырехугольников, в упражнении можно дополнительно указать, с помощью каких измерительных инструментов (циркуля, масштабной линейки или транспортира) следует выполнять это упражнение. Так, например, модель прямоугольника среди других моделей четырехугольников может быть найдена с помощью транспортира или циркуля-измерителя.

Важность своевременной и быстрой проверки правильности усвоения понятий и свойств геометрических фигур очевидна. Поэтому задачи первой группы целесообразно использовать на всех этапах изучения геометрии. Преподаватель должен указать учащимся, с какой точностью должны измеряться элементы предлагаемых моделей (в зависимости от точности изготовления моделей).

Выясняя, какие измерения производили ученики на модели, преподаватель имеет возможность установить, различают ли они необходимые и достаточные признаки данной геометрической фигуры.

Задачи второй группы характеризуются тем, что, кроме указанных операций, учащиеся занимаются и вычислениями по известным формулам (без каких-либо дополнительных построений и преобразований).

П р и м е р ы: а) определить объем цилиндра, развертка которого дана на чертеже;

б) найти среди данных моделей модель правильной четырехугольной призмы и определить площадь ее боковой поверхности.

Задачи этой группы допускают уже несколько решений. Так, пример "б" может быть решен в результате измерения стороны основания призмы с помощью миллиметровой линейки или после измерения периметра ее основания полоской миллиметровой бумаги. План одного из решений определяется не только сообразительностью ученика, но и размерами модели, и наличием измерительных инструментов.

Решение задач второй группы требует от учащихся знания правил действия с приближенными числами. Этим они отличаются от простейших задач на вычисление, которые задаются, как правило, точными числами. Сравним две задачи:

1) основания трапеции равны 7 и 10 см. Вычислить ее среднюю линию;

2) дана модель трапеции; определить ее среднюю линию, измерив только два линейных элемента.

По содержанию эти задачи тождественны. Но с методической точки зрения вторая ценнее, так как требует от ученика знания свойств не только средней линии трапеции, но и умения найти на модели трапеции ее основания (непосредственное измерение расстояния между серединами боковых сторон исключается).

К третьей группе относятся задачи, для решения которых необходимо применить комплекс теорем или понятий. Данные получаем в результате непосредственных измерений элементов развертки и воображаемых перемещений ее частей. Процесс решения таких задач состоит из двух этапов: отыскания теоремы, на основании которой может быть решена задача, и доказательства, что для ее решения целесообразна именно эта теорема.

П р и м е р. Можно ли из данных моделей треугольников составить развертку пирамиды?

Если задачи первых двух групп требуют от учащихся знания одного какого-то свойства одной геометрической фигуры, то при решении задач третьей группы необходимо применить несколько свойств нескольких фигур.

П р и м е р. На чертеже даны два треугольника. Можно ли из них составить трапецию? Для решения необходимо установить, что каждую трапецию можно разрезать на два треугольника, у которых есть по одной равной стороне и по одному равному углу при этой стороне; проверить, обладают ли этими свойствами треугольники, приведенные на чертеже.

Задачи первых трех групп решаются без выполнения чертежей, набросков, которые обычно используются при рассмотрении аналогичных задач на вычисление. Задачи третьей группы требуют от учеников большего пространственного воображения, чем задачи первых двух групп. В этом их главная трудность, но вместе с тем и ценность.

З а д а ч а 1. На рис. 11.2 даны две части развертки одного и того же наклонного параллелепипеда. Отметить ребра, по которым была разрезана развертка.

Задача имеет несколько решений. Работа облегчается, если после необходимых измерений позволить учащимся применить цветные карандаши для обозначения равных отрезков и углов; используется демонстрационная модель наклонного параллелепипеда.

Схема решения задачи: на основании измерения сторон и углов параллелограммов, составляющих развертку, находим среди них такие, которые могут быть противоположными гранями наклонного параллелепипеда; устанавливаем, что ребра параллелепипеда, имеющие общие вершины, попарно не равны между собой; на основании предыдущего делаем вывод, что развертка могла быть разрезана по ребру CC_1 (*MK*) или AA_1 (*HP*); так как противоположные грани параллелепипеда равны, задача имеет два решения.

Эта задача становится более интересной, если все ребра параллелепипеда равны между собой.

Даны две части развертки одного и того же параллелепипеда. Отметить ребра, по которым была разделена развертка (на рис. 11.3, *а—г* представлены различные варианты этой задачи по нарастанию трудности).

Четвертую группу составляют задачи на определение таких элементов геометрических фигур, заданных моделями или развертками, которые (элементы) нельзя измерить непосредственно.

Такие задачи дают возможность учащимся подумать не только над тем, какие элементы модели целесообразнее измерить, но и каким методом эффективнее решать задачу (вычислением, построением или их сочетанием). Выбор

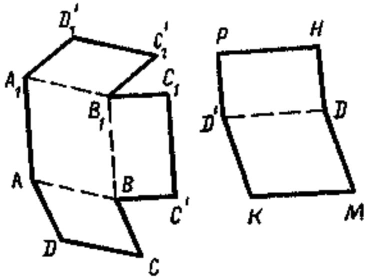


Рис. 11.2

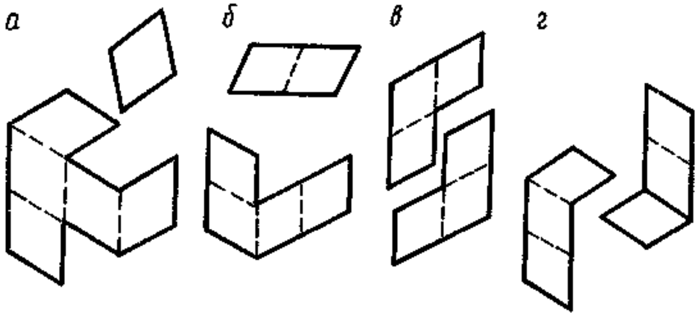


Рис. 11.3

решения зависит в первую очередь от размеров и форм данной модели. Рациональное решение многих задач связано с выполнением дополнительных построений на данных моделях или развертках. Эти построения необходимы для выявления большего числа зависимостей между данными и искомыми элементами, а также для упрощения решения задачи.

З а д а ч а 2. Дана модель наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти острый угол, под которым пересекаются в точке O диагонали BD_1 и B_1D.

Анализ решения этой задачи (и аналогичных ей) ведется с помощью проекционного чертежа параллелепипеда (рис. 11.4) и набора различных по форме и линейным размерам моделей параллелепипедов. Вместо проекционного чертежа может быть использована модель параллелепипеда, на которой показаны его диагонали.

В некоторых случаях решение задачи четвертой группы упрощается, если на модели выполнить дополнительные построения.

З а д а ч а 3. Дана модель треугольной призмы. Определить ее объем.

На первый взгляд может показаться, что эта задача не развивает умения рационально применять геометрическую теорию. Но дело в том, что на поверхности не всякой модели наклонной призмы можно построить перпендикулярное сечение (в качестве примера развертка боковой поверхности такой треугольной призмы дана на рис. 11.5).

Еще большее значение для развития логического мышления и пространст-

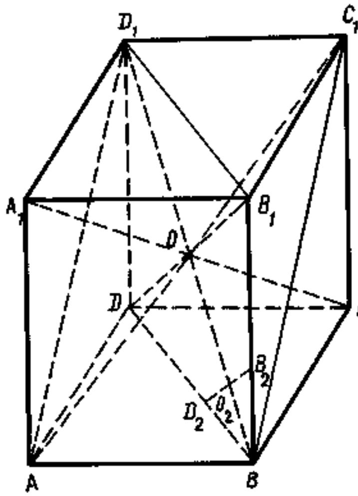


Рис. 11.4

венного воображения учащихся имеют задачи на развертках пространственных фигур.

Дана развертка треугольной пирамиды (рис. 11.6). На ее гранях ABC и ACS_2 даны произвольные точки K и M. Найти длину отрезка KM.

К пятой группе относятся задачи, условие которых задано приближенными числовыми значениями линейных элементов и углов фигуры.

Задачи первой—четвертой групп решаются на основе непосредственного измерения элементов данных моделей или разверток (с помощью дополнительных построений на этих моделях и развертках или без них). Рациональное решение задач пятой группы

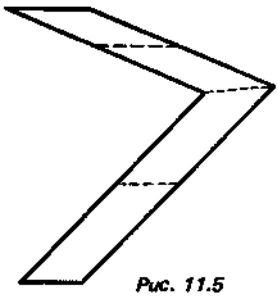


Рис. 11.5

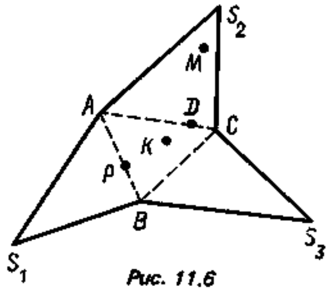


Рис. 11.6

зависит в основном от того, измерения каких элементов произведены на модели или развертке.

Задачи лабораторного типа, условия которых заданы приближенными числовыми значениями линейных элементов и углов геометрических фигур, более сложны по сравнению с рассмотренными выше, так как зависимости между данными и искомыми величинами не могут быть упрощены в результате рациональных измерений на моделях. Эффективное решение таких задач зависит от того, каким методом определяются результаты (вычислением, построением или их сочетанием). Для обучения решению задач лабораторного типа пятой группы можно использовать схему их анализа и решения.

1. Выбор рационального и достаточно точного решения задачи лабораторного типа, условие которой задано приближенными числами, зависит не только от ее содержания, но и от конкретного соотношения между величинами данных элементов. Поэтому первым этапом анализа решения таких задач является уяснение формы данной фигуры.

Анализ формы фигуры, например треугольника, сводится к следующему: определяется вид исследуемого треугольника — прямоугольный, тупоугольный, остроугольный, неравнобедренный или равнобедренный (или близкий по форме к одному из них); устанавливается приближенное соотношение между длинами сторон и высотами. Это необходимо для того, чтобы представить, в каком максимально возможном масштабе (приближенно) его можно построить, например на тетрадном листе. Форма плоской фигуры может быть уяснена в результате инструментального построения ее в произвольном масштабе.

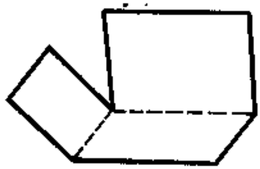


Рис. 11.7

2. После уяснения формы фигуры делается вывод, можно ли практически построить данную фигуру в таком масштабе, который позволит непосредственным измерением определить искомый элемент с точностью, определяемой точностью исходных данных. Другими словами, устанавливается, нельзя ли искомый элемент эффективно определить последующим измерением по чертежу данной фигуры.

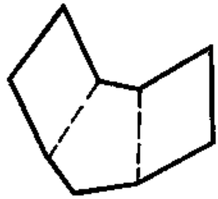


Рис. 11.8

3. Если искомый элемент можно определить построением и последующим измерением по чертежу данной фигуры, строится данная фигура в масштабе 1:1 (или в любом другом практически возможном и удобном для последующих расчетов). Строится и измеряется искомый элемент. Определяется масштаб чертежа, необходимый для получения результата с точностью, определяемой точностью исходных данных. Строится данная фигура в новом масштабе. Строится искомый элемент. Измерением определяется величина искомого элемента в новом масштабе. Вычисляется максимальная ошибка результата.

4. Если искомый элемент нельзя определить построением и последующим измерением по чертежу данной фигуры, пытаются найти те части данной фигуры, которые можно построить.

5. Из указанных в п. 4 фигур выбирают такие, которые позволяют непосредственным измерением с необходимой точностью найти величину искомых элементов или одного такого промежуточного результата, который дает возможность рационально получить ответ.

Если указанные в п. 4 фигуры не обнаруживаются, пытаются это сделать путем дополнительных построений.

6. Дальше задача решается по плану, описанному в п. 3.

7. Проводится исследование полученного решения.

Шестую группу задач лабораторного типа составляют задачи на построение разверток пространственных фигур. Их решение требует применения комплекса геометрических знаний. Данными для получения результата являются непосредственные измерения элементов моделей или разверток, воображаемые перемещения, дополнительные построения и вычисления как по готовым формулам, так и по формулам, полученным в результате тождественных преобразований.

П р и м е р ы: а) дана модель наклонной четырехугольной призмы. Построить ее развертку;

б) дана часть развертки (три различные грани) наклонного параллелепипеда (рис. 11.7). Построить полную его развертку;

в) дана часть развертки (три грани, рис. 11.8) наклонной пятиугольной призмы. Построить недостающие боковые грани этой призмы.

12. ВЕКТОРНОЕ РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

12.1. Основные положения

Применение аппарата векторной алгебры к решению геометрических задач основывается на следующих положениях:

1) необходимым и достаточным условием коллинеарности ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является существование такого числа $x \neq 0$, при котором верно равенство $\vec{b} = x\vec{a}$;

2) если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то всякий вектор $\vec{c}$, компланарный с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, единственным образом представим в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$;

3) если $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ и $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то $x = y = 0$;

4) для каждого вектора пространства существует единственное разложение по трем данным некомпланарным векторам;

5) если $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ и векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарны, то $x = y = z = 0$;

6) в качестве базисных выбираются векторы, у которых известны длины и угол между ними. Во многих случаях целесообразно раскладывать векторы по ортогональным векторам;

7) пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные ортогональные векторы. Если $\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, то $\vec{a}_1\vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$;

8) если $\vec{m}_1 = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$, $\vec{m}_2 = x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}$, то $\vec{m}_1 + \vec{m}_2 = (x_1 \pm x_2)\vec{a} + (y_1 \pm y_2)\vec{b} + (z_1 \pm z_2)\vec{c}$;

9) $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$;

10) если точка A принадлежит прямой BC, то $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$. Если $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, то точка A принадлежит прямой BC;

11) если точка C принадлежит отрезку AB, то $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, $0 \leqslant k \leqslant 1$;

12) если прямые AB и CD перпендикулярны, то $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$;

13) для того чтобы найти длину отрезка AB, раскладывают вектор $\overrightarrow{AB}$ по базисным векторам и находят $\overrightarrow{AB}^2$, используют формулу $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$;

14) величина угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находится по формуле

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|};$$

15) если $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + (1 - m)\overrightarrow{OB}$, то $\overrightarrow{BC} = m\overrightarrow{BA}$ (рис. 12.1). Если $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AC}$, то $\overrightarrow{OB} = m\overrightarrow{OC} + (1 - m)\overrightarrow{OA}$ (рис. 12.2);

16) если $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$ (рис. 12.3), то

$$\vec{a}^2 = (\vec{b} - \vec{c})^2 = \vec{b}^2 - 2\vec{b}\vec{c} + \vec{c}^2 \quad \text{и} \quad \vec{b}\vec{c} = 0{,}5(\vec{b}^2 + \vec{c}^2 - \vec{a}^2);$$

17) решение метрических задач связано с применением скалярного произведения векторов. При решении аффинных задач свойства скалярного произведения, как правило, не используются.

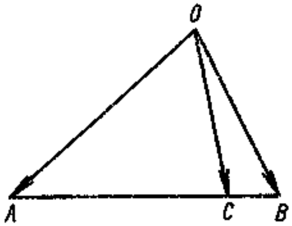


Рис. 12.1

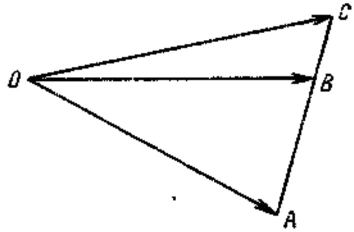


Рис. 12.2

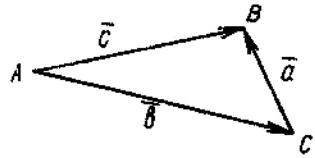


Рис. 12.3

12.2. Примерный общий план векторного решения задач

Общий план векторного решения геометрических задач состоит из следующих частей:

1) перевод условия задачи на язык векторов, т.е. составление системы векторных уравнений по условию задачи;

2) выбор базисных векторов;

3) разложение всех введенных в рассмотрение векторов по базисным векторам;

4) упрощение системы векторных уравнений;

5) замена векторных уравнений алгебраическими (на основании единственности разложения векторов по базисным векторам);

6) решение системы алгебраических уравнений;

7) объяснение геометрического смысла полученного решения этой системы.

12.3. Задачи аналитической геометрии

При решении задач аналитической геометрии в качестве базисных выбираются, как правило, векторы $\bar i$ и $\bar j$.

З а д а ч а 1. Доказать, что отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ параллельны, если $A(1;\ 3)$, $B(2;\ -1)$, $C(0;\ 4)$, $D(2;\ -4)$.

Находим $\overline{AB} = (1;\ -4)$ и $\overline{CD} = (2;\ -8)$. Отсюда $\overline{AB} = 0{,}5\overline{CD}$.

З а д а ч а 2. Найти координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если $A(-1;\ 2;\ 3)$, $B(-2;\ 4;\ 6)$, $C(6;\ -5;\ 8)$.

Четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм (рис. 12.4). Поэтому $\overline{AD} = \overline{BC}$ $(8;\ -9;\ 2)$. Чтобы найти координаты точки D, следует к координатам точки A прибавить соответствующие координаты вектора $\overline{BC}$. Получаем $D(7;\ -7;\ 5)$.

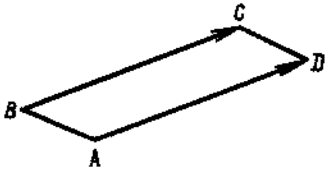


Рис. 12.4

З а д а ч а 3. Записать координаты точки $C(x;\ y;\ z)$, симметричной точке $B(-2;\ 3;\ 4)$ относительно точки $A(3;\ -1;\ 0)$.

Так как $\overline{CA} = \overline{AB}$, то $(3-x;\ -1-y;\ 0-z) = (-5;\ 4;\ 4)$. Отсюда $3-x = -5$, $-1-y=4$, $-z=4$, т.е. $x=8$, $y=-5$, $z=-4$.

З а д а ч а 4. Составить векторное уравнение прямой, заданной точками $A(1;\ -1;\ 2)$ и $B(3;\ -2;\ 4)$.

Ответ. $\overline{AC} = k\overline{AB}$, где k — любое действительное число.

З а д а ч а 5. Принадлежит ли точка $C(7;9;0)$ прямой AB, если $A(-1;1;2)$ и $B(3;\ 6;\ -1)$?

Если точка C принадлежит прямой AB, то существует такое число k, что $\overline{AC} = k\overline{AB}$, т.е. $(8;\ 8;\ -2) = k(4;\ 5;\ -3)$, что невозможно.

З а д а ч а 6. Записать координаты точки C, которая делит отрезок AB в отношении 2:1, считая от точки A, если $A(1;\ -1;\ 2)$ и $B(7;\ -4;\ -1)$.

Очевидно, что $\overline{AC} = \dfrac{2}{3}\overline{AB} = \dfrac{2}{3}(6;\ -3;\ -3) = (4;\ -2;\ -2)$. Поэтому $C(1+4;\ -1-2;\ 2-2)$, т.е. $C(5;\ -3;\ 0)$.

З а д а ч а 7. Можно ли вектор $\overline{D_1K}$ разложить по векторам $\overline{D_1D}$ и $\overline{D_1A_1}$, если $K(-3;\ 7;\ -7)$, $D_1(-3;\ 10;\ -5)$, $D(-5;\ 6;\ -1)$, $A_1(1;\ 6;\ -7)$?

Если $\overline{D_1K} = k\overline{D_1D} + n\overline{D_1A}$, то $(0;\ -3;\ -2) = k(-2;\ -4;\ 4) + n(4;\ -4;\ -2)$. Отсюда получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -2k + 4n; \\ -3 &= -4k - 4n; \\ -2 &= 4k - 2n. \end{aligned}\right\}$$

Система этих уравнений несовместна, поэтому задача не имеет решения. Иначе говоря, точка K не принадлежит плоскости D_1DA_1.

З а д а ч а 8. Назвать координаты какой-либо точки M, принадлежащей прямой AC_1, если $A(-1;\ 2;\ -3)$ и $C_1(1;\ 12;\ -1)$.

Если точка M принадлежит прямой AC_1, то $\overline{AM} = k\overline{AC_1} = k(2;\ 10;\ 2) = (2k;\ 10k;\ 2k)$. Так как $A(-1;\ 2;\ -3)$, то $M(-1+2k;\ 2+10k;\ -3+2k)$. Например, если $k=-2$, то $M(-5;\ -18;\ -7)$.

З а д а ч а 9. Составить уравнение плоскости ABF, если $F(-4;\ 8;\ -3)$, $A(-1;\ 2;\ -3)$ и $B(3;\ 4;\ 1)$.

Если $M(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка плоскости ABF, то $\overline{BM} = k\overline{BA} + n\overline{BF}$ или $(x-3;\ y-4;\ z-1) = k(-4;\ -2;\ -4) + n(-7;\ 4;\ -4)$. Получаем систему уравнений:

$$x-3=-4k-7n; \qquad (12.1)$$
$$y-4=-2k+4n; \qquad (12.2)$$
$$z-1=-4k-4n. \qquad (12.3)$$

Умножим обе части второго уравнения на -2. После этого уравнение (12.2) сложим почленно с уравнениями (12.1) и (12.3). Получим:

$$x-3-2(y-4)=-15n; \qquad (12.4)$$
$$z-1-2(y-4)=-12n. \qquad (12.5)$$

Умножаем уравнение (12.4) на 4, уравнение (12.5) — на -5. После почленного сложения этих уравнений получаем ответ: $5z-2y-4x+15=0$.

Задача 10. Принадлежит ли точка $K(-3;\ 9;\ -5)$ плоскости BAC, если $B(3;\ 4;\ 1)$, $A(1;\ 6;\ -7)$ и $C(-3;\ 10;\ -5)$?

Если точка K принадлежит плоскости BAC, то $\overline{AK}=k\overline{AB}+n\overline{AC}$, т.е. $(-4;\ 3;\ 2)=k(2;\ -2;\ 8)+n(-4;\ 4;\ 2)$. Отсюда $-4=2k-4n$, $3=-2k+4n$, $2=8k+2n$. Система этих уравнений несовместна. Поэтому точка K не принадлежит плоскости BAC.

Задача 11. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $B(3;\ 4;\ 1)$ и параллельной плоскости AMK, если $A(-1;\ 2;\ -3)$, $M(5;\ 8;\ -3)$ и $K(-3;\ 10;\ -5)$.

Если $M(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка плоскости α, то $\overline{BP}=k\overline{AM}+n\overline{AK}$, т.е. $(x-3;\ y-4;\ z-1)=k(6;\ 6;\ 0)+n(-2;\ 8;\ -2)$. Отсюда $x-3=6k-2n$, $y-4=6k+8n$, $z-1=-2n$.

Исключив из системы этих уравнений параметры k и n, получим уравнение плоскости α: $5z+y-x-6=0$.

Задача 12. Доказать, что прямые BD и AC скрещивающиеся, если $B(3;\ 4;\ 1)$, $D(-3;\ 10;\ -5)$, $A(1;\ 6;\ -7)$ и $C(1;\ 12;\ -1)$.

Очевидно, что $\overline{BD}=(-6;\ 6;\ -6)$ и $\overline{AC}=(0;\ 6;\ 6)$. Отсюда ясно, что векторы $\overline{BD}$ и $\overline{AC}$ неколлинеарны.

Допустим, что существует точка M пересечения прямых $\overline{BD}$ и $\overline{AC}$ (рис. 12.5). Тогда $\overline{BA}+\overline{AM}=\overline{BM}$, т.е. $\overline{BA}+n\overline{AC}=k\overline{BD}$ или $(-2;\ 2;\ -8)+n(0;\ 6;\ 6)=k(-6;\ 6;\ -6)$. Отсюда $-2=-6k$, $2+6n=6k$, $-8+6n=-6k$. Система этих уравнений несовместна. Следовательно, точки M не существует.

Задача 13. Найти координаты точки M, отличной от точки B и принадлежащей прямой DB, если $\overline{CM}=\overline{CB}$ и $B(3;\ 4;\ 1)$, $D(-3;\ 10;\ -5)$, $C(5;\ 8;\ -3)$.

Пусть $\overline{BM}=k\overline{BD}=k(-6;\ 6;\ -6)$. Тогда $\overline{CM}=\overline{CB}+\overline{BM}=(-2;\ -4;\ 4)+k(-6;\ 6;\ -6)=(-2-6k;\ -4+6k;\ 4-6k)$.

По условию задачи $\overline{CM}^2=\overline{CB}^2$. Поэтому $(-2-6k)^2+(-4+6k)^2+(4-6k)^2=36$. Отсюда $k_1=0$ и $k_2=2/3$. Но точки M и B не совпадают. Поэтому $\overline{BM}=\frac{2}{3}(-6;\ 6;\ -6)=(-4;\ 4;\ -4)$ и $M(-1;\ 8;\ -3)$.

Задача 14. Найти расстояние B_1H от точки B_1 до прямой D_1B, если $B_1(5;\ 8;\ -3)$, $D_1(-3;\ 10;\ -5)$ и $B(3;\ 4;\ 1)$ (рис. 12.6).

Пусть $\overline{D_1H}=n\overline{D_1B}=n(6;\ -6;\ 6)$. Далее,

$$\overline{HB_1}=\overline{D_1B_1}-\overline{D_1H}=(8;\ -2;\ 2)-n(6;\ -6;\ 6)=$$

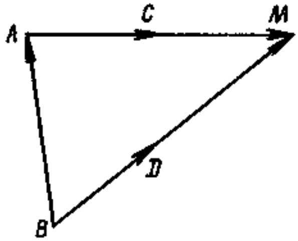


Рис. 12.5

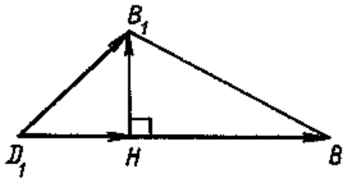


Рис. 12.6

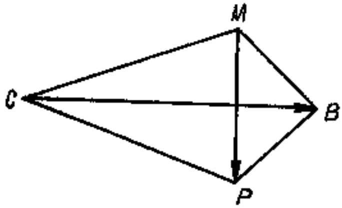


Рис. 12.7

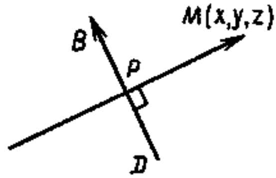


Рис. 12.8

$$= (8 - 6n;\ -2 + 6n;\ 2 - 6n). \qquad (12.6)$$

По условию задачи $\overline{D_1B} \cdot \overline{HB_1} = 0$, поэтому

$$6(8 - 6n) - 6(-2 + 6n) + 6(2 - 6n) = 0.$$

Отсюда $n = 2/3$. Из равенства (12.6) имеем $\overline{HB}_1 = (4;\ 2;\ -2)$; $\overline{HB}_1^2 = 4^2 + 2^2 + (-2)^2 = 24$ и $\overline{HB}_1 = 2\sqrt{6}$.

З а д а ч а 15. Составить уравнение плоскости α, проходящей через середину M отрезка AD и перпендикулярной к прямой CB (рис. 12.7), если $A(-1;\ 2;\ -3)$, $D(-5;\ 6;\ -1)$, $C(-3;\ 10;\ -5)$ и $B(3;\ 4;\ 1)$.

Очевидно, что $M(-3;\ 4;\ -2)$. Пусть $P(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка плоскости α. Тогда $\overline{MP} \cdot \overline{CB} = 0$ или $(x + 3;\ y - 4;\ z + 2)(6;\ -6;\ 6) = 0$ или $6(x + 3) - 6(y - 4) + 6(z + 2) = 0$.

Итак, уравнение плоскости α имеет вид $z - y + x + 9 = 0$.

З а д а ч а 16. Составить уравнение плоскости α, относительно которой симметричны точки $D(-5;\ 6;\ -1)$ и $B(3;\ 4;\ 1)$ (рис. 12.8).

Плоскость α пересекает отрезок DB в точке $P(-1;\ 5;\ 0)$, которая является серединой отрезка DB. Пусть $M(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка плоскости α. Тогда $\overline{DB} \cdot \overline{PM} = 0$, т.е. $(8;\ -2;\ 2)(x + 1;\ y - 5;\ z) = 0$ или $8(x + 1) - 2(y - 5) + 2z = 0$.

Итак, уравнение плоскости α имеет вид $4x - y + z + 9 = 0$.

З а д а ч а 17. Найти координаты точки $M(x;\ y;\ z)$, симметричной точке $B_1(5;\ 8;\ -3)$ относительно прямой, заданной точками $B(3;\ 4;\ 1)$ и $A_1(1;\ 6;\ -7)$ (рис. 12.9).

1. Вектор $\overline{BH} = 0{,}5\,\overline{BB}_1 + 0{,}5\,\overline{BM}$, $\overline{BH} = k\overline{BA}_1$;

$$k\overline{BA}_1 = 0{,}5\overline{BB}_1 + 0{,}5\overline{BM}; \qquad (12.7)$$

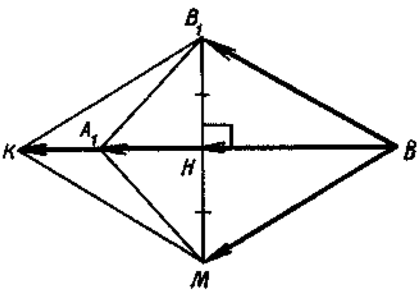


Рис. 12.9

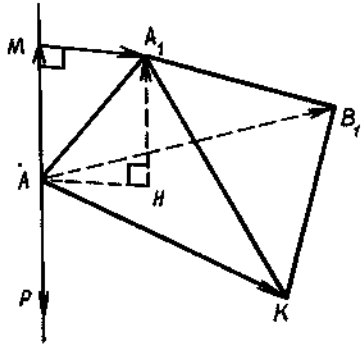


Рис. 12.10

$$\overline{B_1M}\cdot\overline{BA_1} = 0. \qquad (12.8)$$

Из равенств (12.7) и (12.8) получаем:

$$k\,(-2;\ 2;\ -8) = 0{,}5\,(2;\ 4;\ -4) + 0{,}5\,(x-3;\ y-4;\ z-1);$$

$$(x-5;\ y-8;\ z+3)\ \ (-2;\ 2;\ -8) = 0.$$

Система этих уравнений равносильна следующей системе:

$$\left.\begin{aligned} -2k &= 1 + 0{,}5\,(x-3);\\ -8k &= -2 + 0{,}5\,(z-1);\\ 2k &= 2 + 0{,}5\,(y-4);\\ -2\,(x-5) &+ 2\,(y-8) - 8\,(z+3) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Решив эту систему уравнений, получим $M\,(-1;\ 2;\ -3)$.

2. Пусть K — такая точка прямой BA_1, что четырехугольник BB_1MK является ромбом (рис. 12.9). Если $\overline{BK} = k\overline{BA_1} = (-2k;\ 2k;\ -8k)$, то $K\,(3-2k;\ 4+2k;\ 1-8k)$ и $\overline{B_1K} = (-2-2k;\ -4+2k;\ 4-8k)$, $\overline{B_1B} = (-2;\ -4;\ 4)$.

Так как $\overline{B_1K^2} = \overline{B_1B^2}$, то

$$(-2-2k)^2 + (-4+2k)^2 + (4-8k)^2 = (-2)^2 + (-4)^2 + 4^2.$$

Отсюда $k = 0$ или $k = 1$. Теперь ясно, что $K\,(1;\ 6;\ -7)$. Точка H — середина отрезка BK, поэтому $H\,(2;\ 5;\ -3)$ и $M\,(-1;\ 2;\ -3)$.

Задача 18. Найти расстояние A_1H от точки $A_1\,(1;\ 6;\ -7)$ до плоскости AB_1K, заданной точками $A\,(-1;\ 2;\ -3)$, $B_1\,(5;\ 8;\ -3)$ и $K\,(-1;\ 8;\ -6)$ (рис. 12.10).

1. Пусть $P\,(0;\ y;\ z)$ такая точка, что $\overline{AP}\cdot\overline{AB_1} = 0$ и $\overline{AP}\cdot\overline{AK} = 0$. Так как $\overline{AP} = (1;\ y-2;\ z+3)$, $\overline{AB_1} = (6;\ 6;\ 0)$, $\overline{AK} = (0;\ 6;\ -3)$, то последние два равенства принимают вид:

$$6 + 6\,(y-2) = 0;\ \ 6\,(y-2) - 3\,(z+3) = 0.$$

Решив систему этих уравнений, имеем: $y = 1$, $z = -5$. Итак, $\overline{AP} = (1;\ -1;\ -2)$.

Пусть $\overline{AM} = \overline{HA_1}$. Тогда $\overline{MA_1}\cdot\overline{AM} = 0$. Если $\overline{AM} = n\overline{AP} = (n;\ -n;\ -2n)$, то $\overline{MA_1} = \overline{AA_1} - \overline{AM} = (2-n;\ 4+n;\ -4+2n)$ и $(2-n)n-(4+n)n\ -(-4+$ $+2n)2n=0$. Отсюда $n=1$, $\overline{HA_1} = (1;\ -1;\ -2)$ и $\overline{HA_1} = \sqrt{6}$.

2. Пусть $\overline{A_1B'} = \overline{AB_1}$ и отрезок MT – общий перпендикуляр к прямым A_1B' и AK (рис. 12.11). Тогда $A_1H = MT$.

Пусть $\overline{A_1M} = m\overline{A_1B'} = m\overline{AB_1} = (6m;\ 6m;\ 0)$ и $\overline{AT} = k\overline{AK} = (0;\ 6k;$ $-3k)$. Очевидно, что

$$\overline{A_1B'}\cdot\overline{TM} = 0; \qquad (12.9)$$

$$\overline{AK}\cdot\overline{TM} = 0. \qquad (12.10)$$

Находим

$$\overline{TM} = \overline{AA_1} + \overline{A_1M} - \overline{AT} = (2+6m;\ 4+6m-6k;\ -4+3k).$$

После этого равенства (12.9) и (12.10) преобразуются к виду:

$$\left.\begin{aligned} &6(2+6m)+6(4+6m-6k)=0;\\ &6(4+6m-6k)-3(-4+3k)=0. \end{aligned}\right\}$$

Решив систему этих уравнений, получим: $m=-1/6$, $k=2/3$, $\overline{TM} = (1;\ -1;\ -2)$ и $A_1H = \sqrt{6}$.

3. Пусть $\overline{AH} = n\overline{AB_1} + k\overline{AK}$, $\overline{HA_1}\cdot\overline{AB_1} = 0$, $\overline{HA_1}\cdot\overline{AK} = 0$ (рис. 12.12). Тогда

$$(\overline{AA_1} - \overline{AH})\overline{AB_1} = 0; \qquad (12.11)$$

$$(\overline{AA_1} - \overline{AH})\overline{AK} = 0. \qquad (12.12)$$

Очевидно, что $\overline{HA_1} = \overline{AA_1} - \overline{AH} = \overline{AA_1} - n\overline{AB_1} - k\overline{AK} = (2-6n;\ 4-$ $-6n-6k;\ -4+3k)$, $\overline{AB_1} = (6;\ 6;\ 0)$, $\overline{AK} = (0;\ 6;\ -3)$.

После этого уравнения (12.11) и (12.12) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} &6(2-6n)+6(4-6k)=0;\\ &6(4-6n-6k)-3(-4+3k)=0. \end{aligned}\right\}$$

Решив систему этих уравнений, получим: $k=2/3$, $n=1/6$, $\overline{HA_1} = (1;\ -1;\ -2)$ и $\overline{HA_1} = \sqrt{6}$.

4. Пусть прямая A_1H пересекает плоскость XOY в точке $P(x;\ y;\ 0)$. Тогда

$$\overline{A_1P}\cdot\overline{AK} = 0; \qquad (12.13)$$

$$\overline{A_1P}\cdot\overline{AB} = 0. \qquad (12.14)$$

Так как $\overline{A_1P} = (x-1;\ y-6;\ 7)$, $\overline{AK} = (0;\ 6;\ -3)$, $\overline{AB_1} = (6;\ 6;\ 0)$, уравнения (12.13) и (12.14) преобразуются к виду:

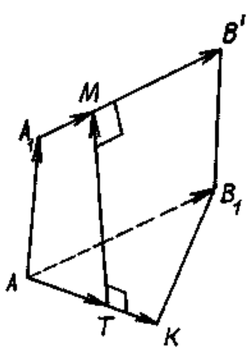


Рис. 12.11

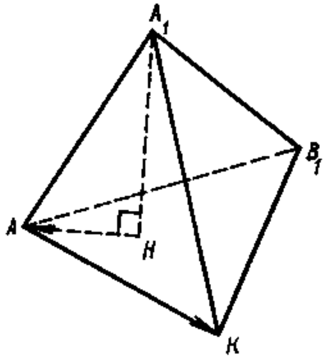


Рис. 12.12

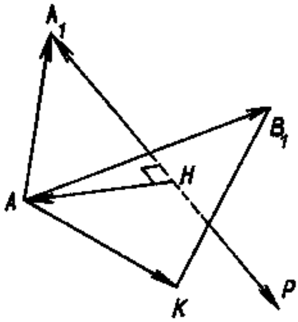


Рис. 12.13

$$6(y-6)-21=0;\ 6(x-1)+6(y-6)=0.$$

Решив систему этих уравнений, найдем $P(-2{,}5;\ 9{,}5;\ 0)$. Из прямоугольного треугольника AHA_1 получаем (рис. 12.13)

$$A_1H=|A_1A\cos\angle AA_1H|=\left|A_1A\ \frac{\overline{A_1A}\cdot\overline{A_1P}}{|\overline{A_1A}||\overline{A_1P}|}\right|=$$

$$=\frac{|\overline{A_1A}\cdot\overline{A_1P}|}{|\overline{A_1P}|}=\left|\frac{(-2;\ -4;\ 4)\ (-3{,}5;\ 3{,}5;\ 7)}{\sqrt{3{,}5^2+3{,}5^2+7^2}}\right|=\sqrt{6}.$$

5. Пусть $\overline{HM}=\overline{A_1H}$ (рис. 12.14) и $M(x;\ y;\ z)$. Тогда $\overline{AM}^2=\overline{AA}_1^2$, $\overline{KM}^2=\overline{A_1K}^2$, $\overline{B_1M}^2=\overline{A_1B}_1^2$. Получаем систему уравнений:

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=36; \tag{12.15}$$

$$(x+1)^2+(y-8)^2+(z+6)^2=9; \tag{12.16}$$

$$(x-5)^2+(y-8)^2+(z+3)^2=36. \tag{12.17}$$

Выполнив почленное вычитание уравнений (12.17) и (12.15), (12.17) и (12.16), получим:

$$-12x+24-12y+60=0;\ \ -12x+24-6z-27=27.$$

Отсюда $y=-x+7$ и $z=-2x-5$. После этого уравнение (12.15) принимает вид $(x+1)^2+(-x+5)^2+(-2x-2)^2=36$. После очевидных преобразований последнего уравнения и уравнений (12.16) и (12.17) получаем: $x_1=1$, $x_2=-1$, $y_1=6$, $y_2=8$, $z_1=-7$, $z_2=-3$.

Итак, $M_1(1;\ 6;\ -7)$ или $M_2(-1;\ 8;\ -3)$. Но $M_1=A_1$, поэтому $M(-1;\ 8;\ -3)$, $H(0;\ 7;\ -5)$ и $\overline{HA_1}=(1;\ -1;\ -2)$, $HA_1=\sqrt{6}$.

6. Пусть $H(x;\ y;\ z)$ — основание перпендикуляра A_1H к плоскости AB_1K (рис. 12.15). Тогда

$$\overline{HA}\cdot\overline{HA}_1=0;\ \ \overline{HB}_1\cdot\overline{HA}_1=0;\ \ \overline{HK}\cdot\overline{HA}_1=0. \tag{12.18}$$

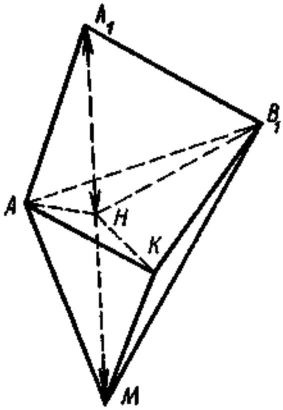


Рис. 12.14

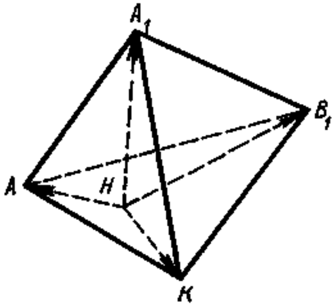


Рис. 12.15

Так как

$$\overline{HA} = (-1 - x;\ 2 - y;\ -3 - z);$$
$$\overline{HA_1} = (1 - x;\ 6 - y;\ -7 - z);$$
$$\overline{HB_1} = (5 - x;\ 8 - y;\ -3 - z);$$
$$\overline{HK} = (-1 - x;\ 8 - y;\ -6 - z),$$

то равенства (12.18) принимают вид:

$$(-1 - x)(1 - x) + (2 - y)(6 - y) + (-3 - z)(-7 - z) = 0;$$
$$(5 - x)(1 - x) + (8 - y)(6 - y) + (-3 - z)(-7 - z) = 0;$$
$$(-1 - x)(1 - x) + (8 - y)(6 - y) + (-6 - z)(-7 - z) = 0.$$

Выполнив почленное вычитание второго уравнения из первого и третьего из первого, получим:

$$-6(1 - x) - 6(6 - y) = 0;\quad 6(1 - x) + 3(-7 - z) = 0.$$

Отсюда $y = 7 - x$, $z = -5 - 2x$ и $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_1 = 7$, $y_2 = 6$, $z_1 = -5$, $z_2 = -7$. Итак, $H(0;\ 7;\ -5)$, $\overline{HA_1} = (1;\ -1;\ -2)$, $HA_1 = \sqrt{6}$.

7. Прямая A_1H является пересечением плоскостей α и β, перпендикулярных соответственно к прямым AB_1 и B_1K и проходящих через точку A_1.

Составляем уравнения этих плоскостей:

$$(x - 1)6 + (y - 6)6 + (z + 7)0 = 0; \qquad (12.19)$$
$$(x - 1)6 + (y - 6)0 + (z + 7)3 = 0 \qquad (12.20)$$

или

$$y + x - 7 = 0;\quad z + 2x + 5 = 0. \qquad (12.21)$$

Найдем координаты какой-либо точки F, принадлежащей прямой A_1H, т.е. такой, которая является решением системы уравнений (12.21). Пусть $x = 0$. Тогда $y = 7$, $z = -5$. Итак, точка $F(0;\ 7;\ -5)$ лежит на прямой A_1H.

Точка H является пересечением прямой AF и плоскости AB_1K, которая перпендикулярна к этой прямой. Поэтому получаем уравнение плоскости AB_1K:

$$(x+1)1 + (y-2)(-1) + (z+3)(-2) = 0$$

или

$$2z + y - x + 3 = 0. \qquad (12.22)$$

Решив систему уравнений (12.21) и (12.22), найдем $H(0{,}7;\ -5)$ и $HA_1 = \sqrt{6}$.

12.4. Задачи элементарной геометрии

Задачи на взаимное положение точек, прямых и плоскостей не требуют применения свойств скалярного произведения векторов. При решении метрических задач используются все изучаемые в школе свойства этого произведения.

Задача 1. Медианы CK и AM треугольника ABC пересекаются в точке P (рис. 12.16). Доказать, что $MP : PA = KP : PC = 1:2$.

Пусть точка P принадлежит отрезку AM и $AP : PM = 2:1$. Тогда $\overline{CP} = \frac{1}{3}\overline{CA} + \frac{2}{3}\overline{CM} = \frac{1}{3}(\overline{CA} + \overline{CB})$. Далее, $\overline{CK} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB})$. Отсюда ясно, что $\overline{CP} = \frac{2}{3}\overline{CK}$, т.е. медиана CK проходит через точку P и $CP : PK = 2:1$.

Задача 2. Отрезок AM — биссектриса треугольника ABC (рис. 12.17). Доказать, что $AB : AC = BM : MC$.

Пусть $AB = c$, $AC = b$. Построим ромб $AKMP$. Точки B, M, C принадлежат одной прямой. Поэтому $\overline{AM} = (1-x)\overline{AB} + x\overline{AC} = (1-x)c\overline{AK} + xb\overline{AP}$. С другой стороны, $\overline{AM} = \overline{AK} + \overline{AP}$. Поэтому $(1-x)c = 1$ и $xb = 1$. Отсюда $(1-x) : x = b : c$.

Задача 3. Дан треугольник ABC (рис. 12.18), $\overline{AE} = \overline{EB}$, $\overline{CD} = 2\overline{DB}$. Точка O есть пересечение прямых CE и AD. Найти $DO : OA$.

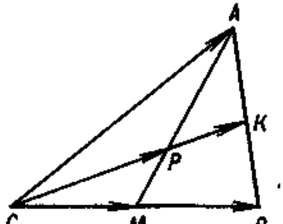


Рис. 12.16

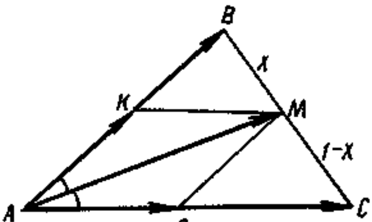


Рис. 12.17

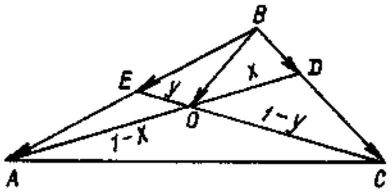


Рис. 12.18

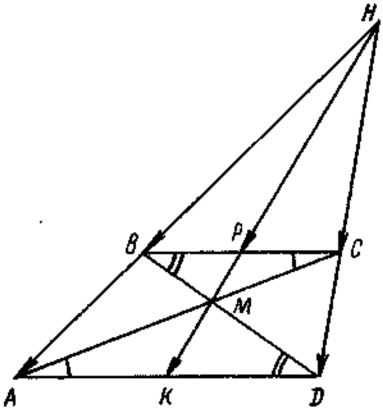


Рис. 12.19

Выберем векторы $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$ в качестве базисных. Точки A, O и D принадлежат одной прямой. Поэтому $\overline{BO} = x\overline{BA} + (1-x)\overline{BD}$. На основании тех же условий $\overline{BO} = (1-y)\,\overline{BE} + y\overline{BC}$. По условию задачи $\overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{BA}$ и $\overline{BD} = \frac{1}{3}\,\overline{BC}$.

Следовательно,

$$\overline{BO} = x\overline{BA} + \frac{1-x}{3}\,\overline{BC};\quad \overline{BO} = \frac{1-y}{2}\,\overline{BA} + y\overline{BC}.$$

Из этих равенств получаем систему уравнений: $x = 0{,}5\,(1-y)$, $(1-x):3 = y$.

Решив ее, имеем: $x = 0{,}4$ и $1 - x = 0{,}6$. Итак, $DO : OA = 0{,}4 : 0{,}6 = 2 : 3$.

Задача 4. $ABCD$ – трапеция с основаниями BC и AD. Прямые AB и CD пересекаются в точке H. Точка M является пересечением прямых AC и BD. Векторы $\overline{BP} = \overline{PC}$, $\overline{AK} = \overline{KD}$. Доказать, что точки H, P, M и K принадлежат одной прямой (рис. 12.19).

Пусть $\overline{BC} = k\overline{AD}$. Тогда из подобия треугольников BMC и DMA следует $MC : MA = k : 1$. Треугольники HBC и HAD подобны, поэтому $\overline{HA} = \frac{1}{k}\,\overline{HB}$ и $\overline{HD} = \frac{1}{k}\,\overline{HC}$.

Считаем векторы $\overline{HB}$ и $\overline{HC}$ базисными. Получаем:

$$\overline{HP} = \frac{1}{2}\,(\overline{HB} + \overline{HC});\quad \overline{HM} = \frac{k}{k+1}\,\overline{HA} + \frac{1}{k+1}\,\overline{HC} = \frac{1}{k+1}\,(\overline{HB} + \overline{HC});$$

$$\overline{HK} = \frac{1}{2}\,(\overline{HA} + \overline{HD}) = \frac{1}{2k}\,(\overline{HB} + \overline{HC}).$$

Теперь ясно, что векторы $\overline{HP}$, $\overline{HM}$, $\overline{HK}$ коллинеарны, т.е. точки H, P, M и K принадлежат одной прямой.

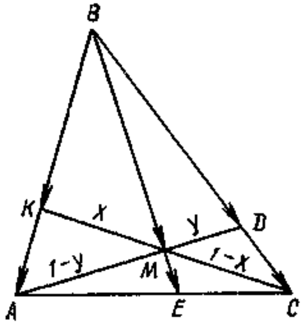


Рис. 12.20

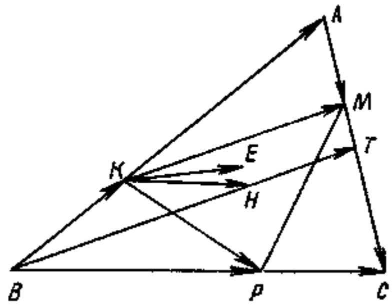


Рис. 12.21

Задача 5. Дан треугольник ABC; $\overline{BD} = 3\overline{DC}$, $\overline{AE} = 1{,}5\,\overline{EC}$, $\overline{BK} = 2\overline{KA}$. Доказать, что прямые AD, BE и CK пересекаются в одной точке (рис. 12.20).

Пусть $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$ – базисные векторы и точка M есть пересечение прямых AD и CK. Очевидно, что

$$\overline{BE} = 0{,}4\overline{BA} + 0{,}6\overline{BC} = 0{,}2\,(2\overline{BA} + 3\overline{BC}). \tag{12.23}$$

В силу коллинеарности точек K, M, C и A, M, D имеем:

$$\overline{BM} = (1-x)\,\overline{BK} + x\overline{BC}; \quad \overline{BM} = y\overline{BA} + (1-y)\,\overline{BD}.$$

Так как $\overline{BK} = 0{,}4\,\overline{BA}$ и $\overline{BD} = 0{,}75\overline{BC}$, то

$$\overline{BM} = \frac{2(1-x)}{3}\,\overline{BA} + x\overline{BC}; \tag{12.24}$$

$$\overline{BM} = y\overline{BA} + \frac{3(1-y)}{4}\,\overline{BC}.$$

Из этих равенств получаем систему уравнений:

$$y = \frac{2(1-x)}{3}\ ; \ x = \frac{3(1-y)}{4}.$$

Решив ее, имеем $x = 1/2$. Теперь равенство (12.24) принимает вид

$$\overline{BM} = \frac{1}{3}\overline{BA} + \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{6}\,(2\overline{BA} + 3\overline{BC}). \tag{12.25}$$

Из равенств (12.23) и (12.25) следует $\overline{BM} = \dfrac{5}{6}\,\overline{BE}$, т.е. прямая BE проходит через точку M.

Задача 6. Дан треугольник ABC. Вектор $\overline{BK} = \dfrac{1}{3}\,\overline{BA}$, $\overline{AM} = \dfrac{1}{3}\,\overline{AC}$, $\overline{CP} = \dfrac{1}{3}\,\overline{CB}$. Доказать, что точки H и E пересечения медиан треугольников ABC и MKP совпадают (рис. 12.21).

Выбираем в качестве базисных векторы $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$. Пусть T – середина отрезка AC. Тогда $\overline{BH} = \dfrac{2}{3}\overline{BT} = \dfrac{1}{3}\,\overline{BA} + \dfrac{1}{3}\,\overline{BC}$. Очевидно, что $\overline{KE} = \dfrac{1}{3}\,\overline{KM} + \dfrac{1}{3}\,\overline{KP}$.

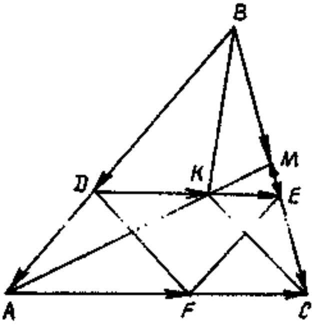


Рис. 12.22

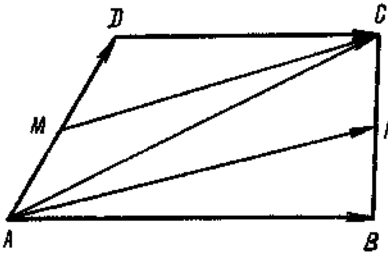


Рис. 12.23

Но

$$\overline{KM} = \overline{KA} + \overline{AM} = \frac{2}{3}\,\overline{BA} + \frac{1}{3}\,\overline{AC} = \frac{2}{3}\,\overline{BA} + \frac{1}{3}\,(\overline{BC} - \overline{BA}) = \frac{1}{3}\,\overline{BA} + \frac{1}{3}\,\overline{BC};$$

$$\overline{KP} = \overline{BP} - \overline{BK} = \frac{2}{3}\overline{BC} - \frac{1}{3}\,\overline{BA}.$$

Поэтому $\overline{KE} = \frac{1}{3}\,\overline{BC}$. Так как $\overline{KH} = \overline{BH} - \overline{BK} = \frac{1}{3}\,\overline{BA} + \frac{1}{3}\overline{BC} - \frac{1}{3}\,\overline{BA} = \frac{1}{3}\,\overline{BC}$, то точки H и E совпадают.

Задача 7. В треугольник ABC вписан параллелограмм $ADEF$ так, что вершины D, E, F лежат соответственно на сторонах AB, BC и AC. Через середину M стороны BC проведена прямая AM, пересекающая прямую DE в точке K. Доказать, что четырехугольник $CFDK$ является параллелограммом (рис. 12.22).

Пусть $\overline{BD} = m\overline{BA}$. Выбираем в качестве базисных векторы $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$. Так как точки D, K, E и A, K, M коллинеарны, то

$$\overline{BK} = (1-x)\,\overline{BD} + x\overline{BE} = m\,(1-x)\,\overline{BA} + mx\overline{BC};$$
$$\overline{BK} = (1-y)\,\overline{BA} + y\overline{BM} = (1-y)\,\overline{BA} + 0{,}5y\overline{BC}.$$

Отсюда $m(1-x) = 1-y$, $mx = 0{,}5y$. Решив систему этих уравнений, находим $x = (1-m)/m$, т.е. $\overline{DK} = \frac{1-m}{m}\,\overline{DE}$. Но $\overline{DE} = m\overline{AC}$. Поэтому $\overline{DK} = (1-m)\,\overline{AC}$.

Далее, $\overline{FC} = \overline{AC} - \overline{AF} = \overline{AC} - \overline{DE} = \overline{AC} - m\overline{AC} = (1-m)\,\overline{AC}$.

Утверждение задачи доказано.

Задача 8. Четырехугольник $ABCD$ – трапеция с основаниями AB и CD, $\overline{AM} = \overline{MD}$; $\overline{BK} = \overline{KC}$. Доказать, что прямые AK и CM непараллельны (рис. 12.23).

Выбираем векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ в качестве базисных. Пусть $\overline{DC} = k\overline{AB}$. Тогда $\overline{MC} = 0{,}5\overline{AD} + k\overline{AB}$, $\overline{AK} = 0{,}5\,(\overline{AB} + \overline{AC}) = 0{,}5\,(\overline{AB} + \overline{AD} + k\overline{AB}) = \overline{MC} + 0{,}5\,(1-k)\,\overline{AB}$. Отсюда ясно, что векторы $\overline{AK}$ и $\overline{MC}$ неколлинеарны.

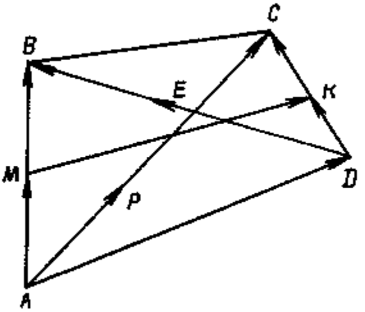


Рис. 12.24

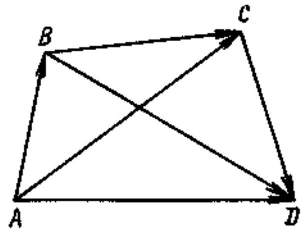


Рис. 12.25

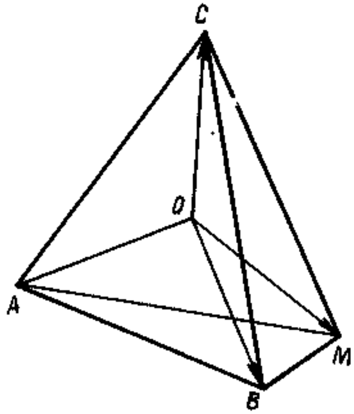


Рис. 12.26

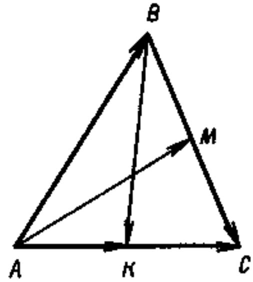


Рис. 12.27

З а д а ч а 9. Доказать, что можно построить треугольник, стороны которого равны половинам диагоналей любого четырехугольника $ABCD$ и его средней линии MK (рис. 12.24).

Выразим векторы $\overline{AP}$, $\overline{DE}$ и $\overline{MK}$ через векторы $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, которые задают четырехугольник $ABCD$. Вектор $\overline{AP} = 0{,}5\overline{AC}$, $\overline{DE} = 0{,}5\overline{DB} = 0{,}5(\overline{AB} - \overline{AD})$, $\overline{MK} = \overline{AD} + \overline{DK} - \overline{AM} = 0{,}5(\overline{AD} + \overline{AC} - \overline{AB})$. Получаем $\overline{DE} + \overline{MK} = 0{,}5\overline{AC}$.

З а д а ч а 10. Доказать, что для любых четырех точек A, B, C, D выполняется равенство

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD} + \overline{BC}\cdot\overline{AD} - \overline{AC}\cdot\overline{BD} = 0. \qquad (12.26)$$

Четырехугольник $ABCD$ можно задать векторами $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ (рис. 12.25). Выражаем через них все остальные векторы в доказываемом равенстве: $\overline{CD} = \overline{AD} - \overline{AC}$, $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$, $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}$. После этого утверждение задачи становится очевидным.

З а д а ч а 11. Вокруг правильного треугольника ABC описана окружность радиусом 1 с центром в точке O. Доказать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки M окружности до вершин этого треугольника равна 6 (рис. 12.26).

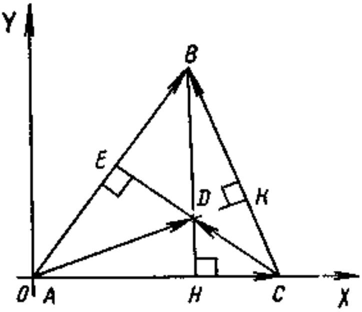


Рис. 12.28

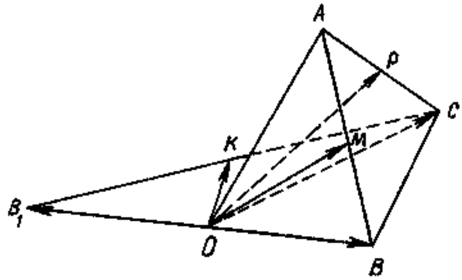


Рис. 12.29

Очевидно, что

$$\overline{CM}^2 + \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = (\overline{OM} - \overline{OC})^2 + (\overline{OA} - \overline{OM})^2 +$$
$$+ (\overline{OB} - \overline{OM})^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OC}^2 - 2\overline{OM}\cdot\overline{OC} + \overline{OA}^2 + \overline{OM}^2 -$$
$$- 2\overline{OA}\cdot\overline{OM} + \overline{OB}^2 + \overline{OM}^2 - 2\overline{OB}\cdot\overline{OM} = 6 - 2\overline{OM}(\overline{OC} + \overline{OA} + \overline{OB}) =$$
$$= 6 - 2\overline{OM}\cdot\overline{0} = 6.$$

З а д а ч а 12. Доказать, что большей медиане треугольника соответствует меньшая сторона (рис. 12.27).

Пусть $AM > BK$ (AM и BK – медианы треугольника ABC).

Вектор $\overline{AM} = \overline{AC} - \overline{MC} = \overline{AC} - 0{,}5\overline{BC}$, $\overline{BK} = \overline{BC} - \overline{KC} = \overline{BC} - 0{,}5\overline{AC}$;

$$\overline{AM}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AC}\cdot\overline{BC} + 0{,}25\overline{BC}^2; \quad (12.27)$$

$$\overline{BK}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BC}\cdot\overline{AC} + 0{,}25\overline{AC}^2. \quad (12.28)$$

Из равенств (12.27) и (12.28) получаем

$$\overline{AM}^2 - \overline{BK}^2 = 0{,}75\overline{AC}^2 - 0{,}75\overline{BC}^2 = 0{,}75(\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2).$$

Задача решена.

З а д а ч а 13. Дан треугольник ABC. Отрезки AK, BH, CE – его высоты. Доказать, что прямые AK, BH и CE пересекаются в одной точке D (рис. 12.28).

Пусть AC – наибольшая из сторон треугольника ABC. Тогда треугольник можно расположить относительно прямоугольной системы координат XOY так, как показано на рис. 12.28.

Пусть $B(a;\ b)$ и $C(c;\ 0)$. Тогда $\overline{AB} = (a;\ b)$ и $\overline{AC} = (c;\ 0)$, $\overline{CB} = (a - c;\ b)$. Пусть прямые CE и AK пересекаются в точке $D(x;\ y)$. Тогда $\overline{AD} = (x;\ y)$ и $\overline{CD} = (x - c;\ y)$.

По условию задачи прямые AD и BC, CD и AB взаимно перпендикулярны. Поэтому $\overline{AD}\cdot\overline{CB} = 0$, $\overline{CD}\cdot\overline{AB} = 0$ и $x(a - c) + yb = 0$, $(x - c)a + yb = 0$. Отсюда $x = a$ и $y = (c - a)a/b$.

З а д а ч а 14. Доказать, что биссектрисы двух плоских углов трехгранного угла и биссектриса угла, смежного с третьим плоским углом, лежат в одной плоскости.

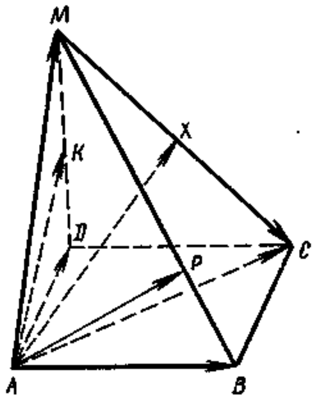


Рис. 12.30

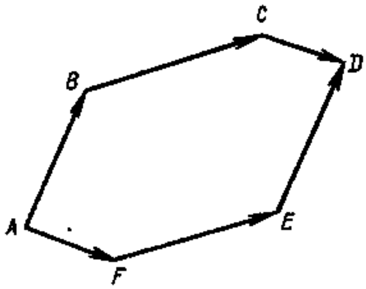


Рис. 12.31

Отложим на ребрах трехгранного угла с вершиной O равные отрезки OA, OB, OC (рис. 12.29). Пусть $\overline{OB}_1 = -\overline{OB}$. Треугольники B_1OC, AOB, AOC равнобедренные, поэтому их биссектрисы OK, OM, OP являются и медианами. Приняв векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ за базисные, разложим по ним векторы: $\overline{OM} = 0{,}5\overline{OB} + 0{,}5\overline{OA}$; $\overline{OP} = 0{,}5\overline{OA} + 0{,}5\overline{OC}$; $\overline{OK} = 0{,}5\overline{OB}_1 + 0{,}5\overline{OC} = -0{,}5\overline{OB} + 0{,}5\overline{OC}$.

Очевидно, что $\overline{OP} - \overline{OM} = 0{,}5\overline{OC} - 0{,}5\overline{OB}$ и $\overline{OK} = \overline{OP} - \overline{OM}$. Утверждение задачи доказано.

З а д а ч а 15. Основанием четырехугольной пирамиды $MABCD$ является параллелограмм $ABCD$, $\overline{DK} = \overline{KM}$, $\overline{BP} = 0{,}25\overline{BM}$. Точка X есть пересечение прямой MC и плоскости AKP. Найти отношение $MX : XC$ (рис. 12.30).

Выберем в качестве базисных векторы $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ и $\overline{AM}$. Так как точка X принадлежит плоскости AKP, то

$$\overline{AX} = m\overline{AK} + n\overline{AP} = m\,(0{,}5\overline{AD} + 0{,}5\overline{AM}) + n\,(0{,}25\overline{AM} + 0{,}75\overline{AB}) =$$

$$= 0{,}75n\overline{AB} + 0{,}5m\overline{AD} + (0{,}5m + 0{,}25n)\,\overline{AM}. \qquad (12.29)$$

Пусть $\overline{MX} = k\overline{MC}$. Тогда

$$\overline{AX} = (1-k)\,\overline{AM} + k\overline{AC} = (1-k)\,\overline{AM} + k\overline{AD} + k\overline{AB}. \qquad (12.30)$$

Из равенств (12.29) и (12.30) имеем: $0{,}75n = k$, $0{,}5m = k$, $0{,}5m + 0{,}25n = 1 - k$. Решив систему этих уравнений, получаем $k = 3/7$, т.е. $MX : XC = 3{:}4$.

З а д а ч а 16. Дана замкнутая неплоская ломаная с шестью звеньями. Доказать, что если противоположные звенья ломаной попарно параллельны, то они попарно равны (рис. 12.31).

Очевидно, что $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AF} + \overline{FE} + \overline{ED}$. Пусть $\overline{AF} = k\overline{CD}$, $\overline{FE} = m\overline{BC}$, $\overline{ED} = n\overline{AB}$. Тогда

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = k\overline{CD} + m\overline{BC} + n\overline{AB}$$

или

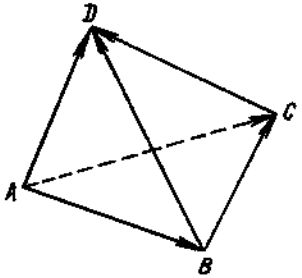


Рис. 12.32

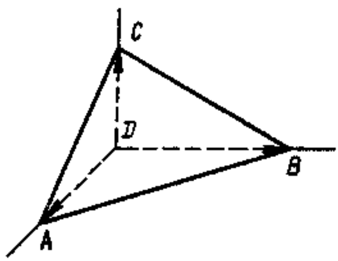


Рис. 12.33

$$(1-n)\,\overline{AB} + (1-m)\,\overline{BC} + (1-k)\,\overline{CD} = \overline{0}.$$

По условию задачи векторы $\overline{AB}, \overline{BC}$ и $\overline{CD}$ неколлинеарны, поэтому $n = m = k = 1$. Утверждение задачи доказано.

Задача 17. Доказать, что если два пересекающихся ребра тетраэдра соответственно перпендикулярны к противолежащим им ребрам, то остальные два противолежащих ребра также взаимно перпендикулярны (рис. 12.32).

Пусть $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ – базисные векторы, а AB и CD, AD и BC – взаимно перпендикулярные прямые. Тогда $\overline{AB}\cdot\overline{CD} = 0$ и $\overline{AD}\cdot\overline{BC} = 0$ или $\overline{AB}\,(\overline{AD} - \overline{AC}) = 0$ и $\overline{AD}\,(\overline{AC} - \overline{AB}) = 0$. Сложив почленно последние два равенства, получаем $\overline{AC}\,(\overline{AD} - \overline{AB}) = 0$ или $\overline{AC}\cdot\overline{BD} = 0$.

Задача 18. Ребра прямого трехгранного угла с вершиной D пересечены плоскостью в точках A, B, C. Доказать, что треугольник ABC остроугольный (рис. 12.33).

По условию задачи векторы $\overline{DA}, \overline{DB}$ и $\overline{DC}$ взаимно перпендикулярны. Находим $\overline{AC}\cdot\overline{AB} = (\overline{DC} - \overline{DA})\,(\overline{DB} - \overline{DA}) = \overline{DC}\cdot\overline{DB} - \overline{DC}\cdot\overline{DA} - \overline{DA}\cdot\overline{DB} + \overline{DA}^2 = \overline{DA}^2 > 0$. А это означает, что угол между векторами $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ острый.

Аналогично показывается, что и два других угла треугольника ABC острые.

Задача 19. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (рис. 12.34). Доказать, что прямая B_1D перпендикулярна к плоскости D_1AC.

Считаем векторы $\overline{DA}, \overline{DD_1}, \overline{DC}$ базисными. Плоскость AD_1C определяется пересекающимися прямыми AD_1 и AC. Пусть $AB = 1$. Докажем, что прямые B_1D и AD_1, B_1D и AC взаимно перпендикулярны. В самом деле,

$$\overline{DB_1}\cdot\overline{AD_1} = (\overline{DA} + \overline{DD_1} + \overline{DC})\,(\overline{DD_1} - \overline{DA}) =$$
$$= \overline{DA}\cdot\overline{DD_1} - \overline{DA}^2 + \overline{DD_1}^2 - \overline{DD_1}\cdot\overline{DA} + \overline{DC}\cdot\overline{DD_1} - \overline{DC}\cdot\overline{DA} =$$
$$= 0 - 1 + 1 - 0 + 0 - 0 = 0.$$

Аналогично показывается, что и $\overline{DB_1}\cdot\overline{AC} = 0$.

Задача 20. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AD и BC взаимно перпендикулярны (рис. 12.35). Доказать, что $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$.

Считаем векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ базисными. Выражаем через них векторы $\overline{CD} = \overline{AD} - \overline{AC}$, $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}$. Тогда

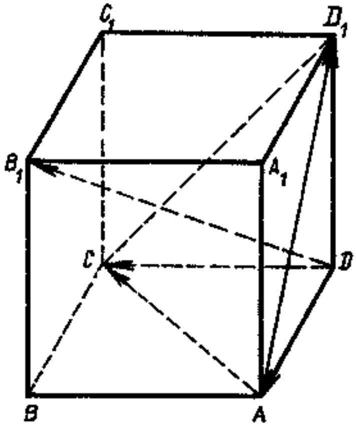


Рис. 12.34

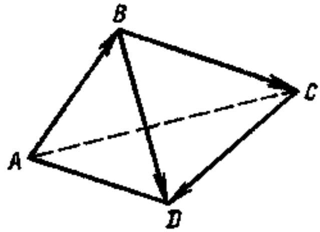


Рис. 12.35

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AB}^2 + (\overline{AD} - \overline{AC})^2 \text{ и } \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AC}^2 + (\overline{AD} - \overline{AB})^2.$$

Отсюда

$$(\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2) - (\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2) = -2\overline{AD}\cdot\overline{AC} + 2\overline{AD}\cdot\overline{AB} =$$

$$= 2\overline{AD}(\overline{AB} - \overline{AC}) = 2\overline{AD}\cdot\overline{CB} = 0,$$

так как прямые AD и BC взаимно перпендикулярны. Утверждение задачи доказано.

13. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ ПЛОСКИХ ФИГУР

13.1. Метод геометрических мест точек

Сущность метода заключается в следующем. Устанавливается множество точек, удовлетворяющих только одному из условий задачи. Строится множество точек, отвечающих только другому условию задачи. Пересечение этих двух точечных множеств определяет искомую фигуру, поэтому этот метод часто называют методом пересечения фигур.

З а д а ч а 1. Построить треугольник ABC, зная, что $AC = b$, $\angle ABC = B$ и высота AH, проведенная из точки A на сторону BC, равна h.

Строим отрезок $AC = b$. Вершина B треугольника ABC лежит на окружности ω, в которую вписывается $\angle ABC$, опирающийся на хорду AC (рис. 13.1). Строим окружность ω. Угол AHC прямой, поэтому точка H лежит на полуокружности ω' диаметром AC. Строим полуокружность ω'. Строим дугу окружности ω'' радиусом h с центром в точке A. Дуга ω'' пересекается с полуокружностью ω' в точке H. Луч CH пересекает окружность ω в точке B.

Таким образом, треугольник ABC удовлетворяет всем требованиям задачи. Ясно, что задача имеет решение, если $h \leqslant b$.

З а д а ч а 2. Построить треугольник ABC, у которого сторона $AB = c$, высота $BH = h$ и медиана $AM = m$.

Зная длину высоты BH искомого треугольника ABC, можно утверждать, что вершина B принадлежит прямой p_2, параллельной прямой AC и отстоящей от нее на расстоянии h (рис. 13.2). Отмечаем на прямой AC произвольную точку A. Так как $AB = c$, то точка B принадлежит также окружности с центром A, радиус которой равен c. Таким образом, точка B определяется как пересечение двух точечных множеств — прямой p_2 и окружности (A, c). Заметим, что пересечение этих двух множеств будет непустым, если $c \geqslant h$. Нам осталось определить положение точки C на прямой p_1. Эта точка будет определена, если установим, пересечением каких множеств является точка M.

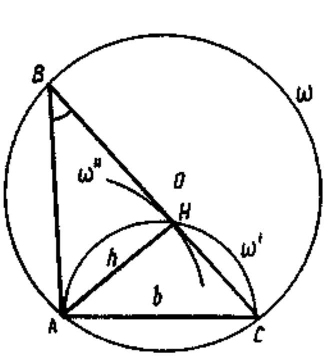


рис. 13.1

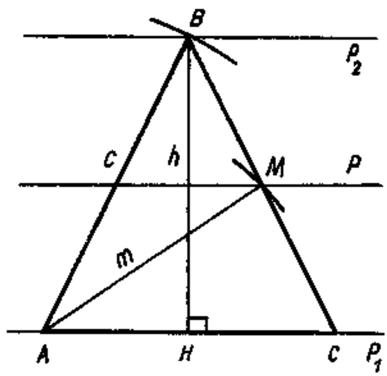


Рис. 13.2

Так как $AM = m$, то точка M принадлежит окружности с центром в точке A и радиусом m. С другой стороны, точка M одинаково удалена от прямых p_1 и p_2. Поэтому точка M принадлежит прямой p, параллельной прямым p_1 и p_2 и одинаково от них отстоящей.

Проводим прямую p. Она пересекается с окружностью (A, m) в точке M. Точка C есть пересечение прямых BM и p_1. Очевидно, что точка M существует только тогда, когда $m \geqslant 0{,}5h$.

13.2. Методы геометрических преобразований

Метод параллельного переноса. Этот метод заключается в том, что некоторым вектором отображают какой-нибудь отрезок или другую часть исследуемой фигуры и сводят анализ (построение) данной фигуры к анализу (построению) вспомогательной, более простой фигуры, затем выполняют обратный перенос и переходят к анализу (построению) фигуры, указанной в задаче.

З а д а ч а 1. На плоскости даны окружности (O, R) и (O_1, R_1) и прямая a. Построить отрезок XY данной длины m, концы которого принадлежат этим окружностям, и параллельный данной прямой a (рис. 13.3).

Задача будет решена, если найдем положение точки X на окружности с данным центром O и данным радиусом R, т.е. на окружности (O, R). Отметим на окружности (O, R) несколько произвольных точек $X_1, X_2, X_3, \ldots$ Построим равные отрезки $X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3, \ldots$ длиной m и параллельные данной прямой a.

Нетрудно заметить, что точки $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ принадлежат некоторой окружности (O', R'). Построив окружность, проходящую через какие-либо три точки из множества $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$, получим гипотезу, что все точки $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ действительно принадлежат одной окружности. Более того, приходим к гипотезе, что $R' = R$, отрезок OO' параллелен данной прямой a и $OO' = m$.

Итак, можно предположить, что искомая точка X есть пересечение окружностей (O, R) и (O', R'), причем окружность (O', R') получается из окружности (O, R) параллельным переносом, у которого $OO' = m$ и отрезок OO' параллелен прямой a.

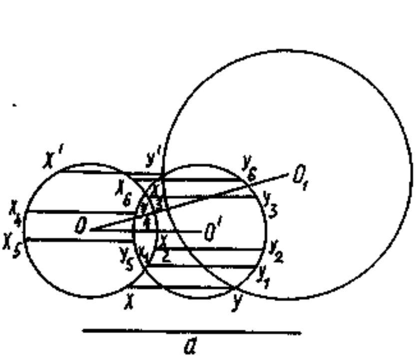


Рис. 13.3

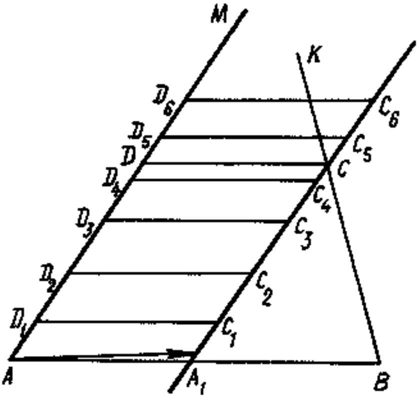


Рис. 13.4

Доказательством этой гипотезы и заканчивается поиск решения задачи.

Задача 2. Построить четырехугольник $ABCD$, зная его углы и две противоположные стороны AB и CD.

Построим отрезок AB и данные углы MAB и ABK (рис. 13.4). Решение задачи сводится к отысканию на луче AM точки D, так как угол ADC известен и длина стороны DC дана.

Отметим на луче AM произвольные точки D_1, D_2, D_3, ... и построим отрезки D_1C_1, D_2C_2, D_3C_3, ..., образующие с лучом AM углы, равные данному углу ADC.

Получаем гипотезу, что точки C_1, C_2, C_3, ... принадлежат одной прямой a. Вероятно, прямая a получается из прямой AM параллельным переносом, который переводит точку A в точку A_1 (лучи AA_1 и DC сонаправлены и $AA_1 = DC$). Теперь ясно, что искомая точка C есть пересечение прямых a и BK.

Задача 3. Построить трапецию $ABCD$, у которой известны длины оснований AB и CD и боковых сторон AD и CB (рис. 13.5).

Строим отрезок AB и окружности (A, AD) и (B, BC), которым принадлежат концы D и C верхнего основания трапеции. Задача будет решена, если определим положение точки C или D на одной из этих окружностей.

Отметим на окружности (A, AD) несколько произвольных точек D_1, D_2, D_3, ... и построим отрезки D_1C_1, D_2C_2, D_3C_3, ... , параллельные прямой AB и равные отрезку DC. После этого получаем гипотезу, что точки C_1, C_2, C_3,..., а следовательно, и искомая точка C, принадлежат некоторой окружности (A', R').

Построив окружность, проходящую через какие-либо три из точек C_1, C_2, C_3, ..., обнаруживаем (еще одна гипотеза!), что $R' = AD$, $AA' = DC$ и отрезок AA' параллелен отрезку AB.

Итак, имеем гипотезу, что искомая точка C есть пересечение окружности (B, BC) и окружности, полученной вектором AA' из окружности (A, AD). Обоснованием этой гипотезы и заканчивается поиск решения задачи.

Задача 4. Построить четырехугольник $ABCD$, зная его стороны и угол между противоположными сторонами BA и CD.

Строим отрезок AB и окружности (A, AD) и (B, BC) (рис. 13.6). Концы отрезка DC принадлежат этим окружностям, и угол между прямыми AB и DC равен данному углу α.

Отметим на окружности (A, AD) произвольные точки D_1, D_2, D_3,... и построим отрезки D_1C_1, D_2C_2, D_3C_3,... данной длины и образующие данный угол с прямой AB. Расположение точек C_1, C_2, C_3, ... наводит на мысль, что они принадлежат некоторой окружности. Построив окружность, проходящую через какие-либо три точки из множества C_1, C_2, C_3, ..., и выполнив соответствующие измерения, приходим к предположению, что множество точек C_1, C_2, C_3, ... принадлежит окружности (A', R'), полученной из окружности (A, AD) вектором $\overline{AA}'$ ($\angle A'AB = \angle \alpha$ и $A'A = DC$).

Итак, точка C есть пересечение окружностей (A', R') и (B, BC). Это утверждение легко доказать.

Задача 5. На плоскости даны углы BAC, KMP и прямая l (рис. 13.7).

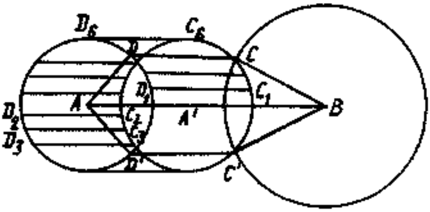


Рис. 13.5

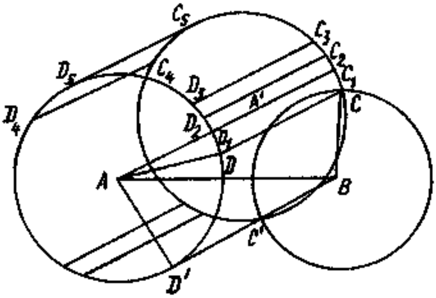


Рис. 13.6

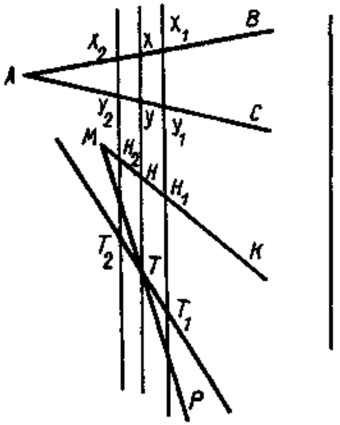


Рис. 13.7

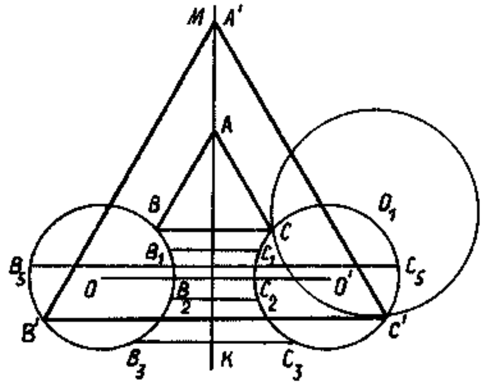


Рис. 13.8

Прямая a параллельна прямой l и пересекает стороны углов BAC и KMP соответственно в точках X, Y, H и T. Построить прямую a так, чтобы $HT = 2XY$.

Построим несколько прямых, параллельных прямой a. Они пересекают плоский угол BAC по отрезкам X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3, ... и луч MK в точках H_1, H_2, H_3, ... Построим на этих прямых такие точки T_1, T_2, T_3, ..., что $H_1T_1 = 2X_1Y_1$, $H_2T_2 = 2X_2Y_2$, ... После этого замечаем, что точки T_1, T_2, T_3, ... принадлежат, вероятно, одной прямой, пересечение которой с лучом MP дает искомую точку T. Доказательством этой гипотезы и заканчивается поиск решения задачи.

Метод осевой симметрии. Сущность его состоит в следующем. Задача предполагается решенной, при этом какая-либо фигура Φ заменяется симметричной ей фигурой Φ_1 относительно некоторой прямой l. После этого фигура Φ_1 подчиняется тем условиям, которым должна удовлетворять фигура Φ. В результате получаем новую задачу, которая решается одним из известных способов. В отдельных случаях существует необходимость возвращения к первоначальному условию задачи.

З а д а ч а 6. Даны прямая MK и окружности (O, R) и (O_1, R_1), принад-

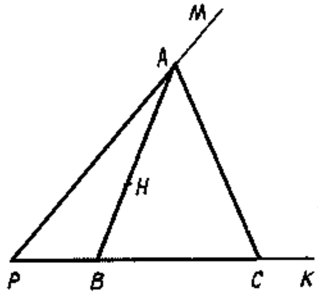


Рис. 13.9

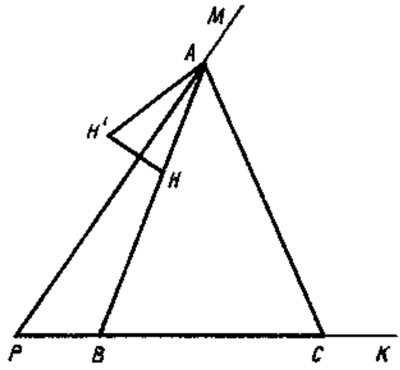


Рис. 13.10

лежащие различным полуплоскостям относительно прямой MK (рис. 13.8). Построить правильный треугольник ABC так, чтобы вершина A принадлежала прямой MK, точка B находилась на окружности (O, R), а точка C — на окружности (O_1, R_1) и прямая BC была бы перпендикулярна к прямой MK.

Очевидно, что точка B симметрична точке C относительно прямой MK. Отметим на окружности (O, R) несколько произвольных точек $B_1, B_2, B_3, \ldots$ и построим точки $C_1, C_2, C_3, \ldots$, симметричные относительно прямой MK соответственно точкам $B_1, B_2, B_3, \ldots$ Нетрудно заметить, что точки $C_1, C_2, C_3, \ldots$

принадлежат окружности (O', R'), симметричной окружности (O, R) относительно прямой MK. Теперь ясно, что точка C есть пересечение окружностей (O', R') и (O_1, R_1).

З а д а ч а 7. Дан острый угол MPK (рис. 13.9). Точка H лежит внутри этого угла. Точка C принадлежит лучу PK. Построить треугольник ABC, такой, чтобы точки B и A принадлежали соответственно лучам PK и PM, а точка H — отрезку AB и $AB = AC$.

Задача будет решена, если определим положение точки A на луче PM. Для поиска решения построим произвольный равнобедренный треугольник ABC $(AB = AC)$, отметим на отрезке AB произвольную точку H и проведем через точку A произвольную прямую AM. Точка P есть пересечение прямых BC и AM.

Измерив транспортиром все углы на рис. 13.9, заметим, что существует определенная зависимость между величинами углов MPK, PAB, BAC:

$$2\angle MPK + 2\angle PAB + \angle BAC = 180^\circ. \tag{13.1}$$

Но как воспользоваться этой гипотезой для отыскания пути решения задачи? И как доказать ее справедливость?

Из равенства (13.1) следует $2\angle PAB + \angle BAC = 180^\circ - 2\angle MPK$. Отсюда ясно, что если точка H' симметрична точке H относительно прямой PM, то $\angle H'AC = 2\angle PAB + \angle BAC = 180^\circ - 2\angle MPK$ (рис. 13.10).

Итак, получаем гипотезу, что искомая точка A принадлежит дуге окружности, стягиваемой хордой $H'C$ и в которую вписывается угол величиной $180^\circ - 2\angle MPK$. Докажем это утверждение.

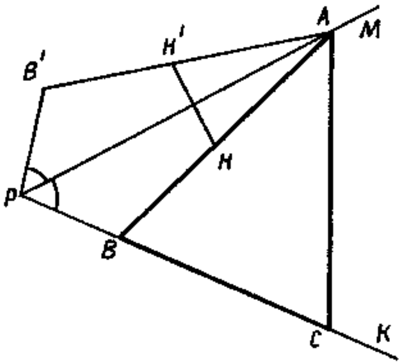


Рис. 13.11

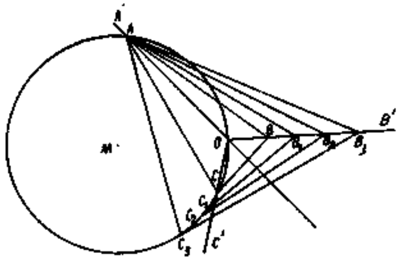


Рис. 13.12

Так как в равенство (13.1) входит угол $2\angle MPK$, строим точку B', симметричную точке B относительно прямой PA (рис. 13.11).

Очевидно, что $\angle PB'A = \angle PBA = 180° - \angle ABC = 180° - \angle ACP$. Поэтому $\angle B'AC = 360° - \angle PB'A - \angle B'PC - \angle PCA = 360° - (180° - \angle ACP) - 2\angle APK - \angle PCA = 180° - 2\angle APK$. Гипотеза, давшая направление поиску решения задачи, доказана.

Для нахождения точки A строим: точку H', симметричную точке H относительно прямой PA; произвольный треугольник $CH'A'$, у которого $\angle H'A'C = 180° - 2\angle MPK$; окружность ω, описанную вокруг треугольника $CH'A'$; точку A, в которой луч PM пересекает окружность ω.

З а д а ч а 8. Даны лучи OA', OB', OC' и точка A на луче OA'. Построить треугольник ABC так, чтобы его вершины B и C принадлежали соответственно лучам OB' и OC' и биссектрисы – прямым OA', OB' и OC' (рис. 13.12).

Отметим на луче OB' несколько произвольных точек B_1, B_2, ... Построим прямые a_1, a_2, ..., симметричные соответственно прямым AB_1, AB_2, ... относительно прямой $A'O$. Построим прямые b_1, b_2, ..., симметричные соответственно прямым AB_1, AB_2, ... относительно прямой $B'O$. Получаем точки C_1, C_2, ..., в которых пересекаются соответственно прямые a_1 и b_1, a_2 и b_2, ...

Замечаем, что точки C_1, C_2, C_3, ... принадлежат некоторой линии, вероятно, окружности. Проведя окружность через какие-либо три точки из множества C_1, C_2, C_3, ..., получим гипотезу, что точки C_1, C_2, C_3, ... принадлежат окружности ω, проходящей через точки A и O, центр M которой принадлежит прямой OB'.

Итак, получаем гипотезу, что искомая точка C является пересечением окружности ω и луча OC'. Теперь остается доказать, что точка C действительно принадлежит окружности ω. Для этого построим произвольную окружность (M, R) (рис. 13.13). Проведем через точку M произвольную прямую MO. (Точка O принадлежит окружности (M, R).) Отметим на окружности (M, R) произвольные точки A и K. Построим угол прямой OAC, равный углу KAO. Точка B есть пересечение прямых MO и AK. Очевидно, что $KO = OC$ и углы KOB и BOC равны. Поэтому треугольник KOB симметричен треугольни-

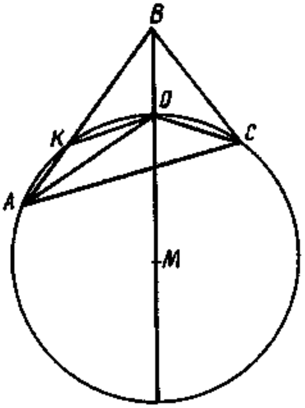


Рис. 13.13

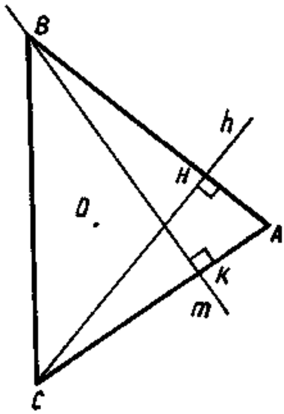


Рис. 13.14

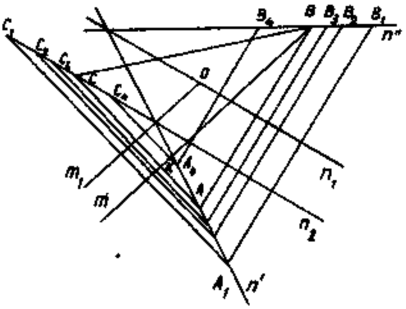


Рис. 13.15

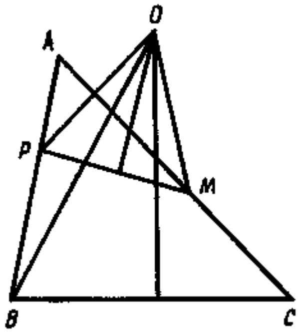


Рис. 13.16

ку *COB* относительно прямой *BO*. Отсюда следует равенство углов *KBO* и *OBC*, *OCB* и *OCA*.

З а д а ч а 9. На плоскости даны прямые m и n и точка O. Построить треугольник ABC, высота CH которого принадлежит прямой n, высота BK — прямой m, а точка O является центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC (рис. 13.14).

Проводим через точку O прямые m_1 и n_1, параллельные соответственно прямым m и n (рис. 13.15). Очевидно, что точка C симметрична точке A относительно прямой m_1, а точка B симметрична точке A относительно прямой n_1. Поэтому решение задачи сводится к отысканию точки C на прямой n.

Отметим на прямой n несколько произвольных точек C_1, C_2, C_3, ... Строим точки A_k, симметричные точкам C_k относительно прямой m_1, и точки B_k, симметричные точкам A_k относительно прямой n_1 ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Замечаем, что точки B_k принадлежат одной прямой n'', а искомая точка B есть пересечение прямых m и n''.

Итак, появляется гипотеза: для отыскания точки B на прямой m нужно построить прямую n', симметричную прямой n относительно прямой m_1, и прямую n'', симметричную прямой n' относительно прямой n_1. Тогда точка B есть

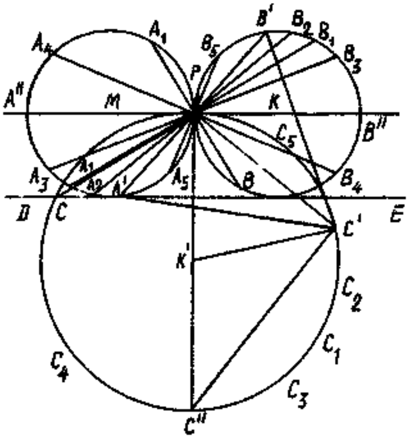


Рис. 13.17

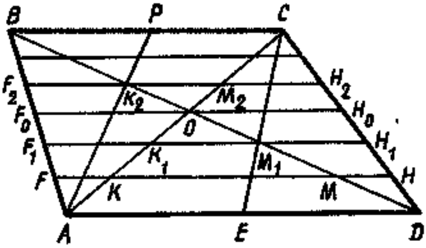


Рис. 13.18

пересечение прямых n'' и m.

Справедливость гипотезы следует из того, что точка A симметрична точке C относительно прямой m_1 и точка B симметрична точке A относительно прямой n_1.

Метод поворота. Метод заключается в том, что, повернув какую-либо данную или искомую фигуру вокруг некоторого центра на некоторый угол, анализ рассматриваемой фигуры сводят к анализу более простой фигуры, а потом выполняют обратное вращение и в результате получают искомую фигуру. Центр и угол поворота следует выбирать так, чтобы в результате поворота совместились элементы одинаковой величины.

З а д а ч а 10. Дан треугольник ABC. Построить такие точки P и M соответственно на его сторонах AB и AC, чтобы $BP = PM = MC$ (рис. 13.16).

Очевидно, что существует такая точка O, повернув вокруг которой отрезок CM на угол BAC, получим отрезок BP.

В равнобедренном треугольнике OPM углы POM и BAC равны, поэтому $OP : PM = k$. Но отрезки PM и BP равны, следовательно, $OP : BP = k$. Значит, точка P есть пересечение отрезка AB с окружностью (множество точек, отношение расстояний от которых до точек O и B равно k).

З а д а ч а 11. Построить правильный треугольник ABC, такой, чтобы его вершины A и B лежали соответственно на двух равных, касающихся в точке P, окружностях (M, R) и (K, R) и притом на одной прямой с их общей точкой касания, а третья вершина C находилась на внешней общей касательной DE данных окружностей (рис. 13.17).

Отметим на окружности (M, R) несколько точек A_k $(k = 1, 2, \ldots)$ и построим точки B_k на окружности (K, R), такие, что $\overline{A_kP} = \overline{PB_k}$.

Строим множество правильных треугольников $A_kB_kC_k$. Замечаем, что точки C_k принадлежат некоторой окружности (гипотеза!).

Инструментальные построения и измерения позволяют уточнить эту гипотезу и заменить ее другой: точки C_k принадлежат окружности, диаметр которой в $\sqrt{3}$ раза больше диаметра данных касающихся окружностей, и ее центр принадлежит прямой, перпендикулярной к прямой MK.

Справедливость этой гипотезы легко угадывается из чертежа.

Итак, построение искомого треугольника ABC выполним в таком порядке: повернем на прямой угол вокруг точки P луч PK и на его образе построим отрезок PK, такой, что $PK'' = \sqrt{3}PK$; построим окружность $(K', K'P)$; искомая точка C есть пересечение прямой DE и окружности $(K', K'P)$.

Метод гомотетии и подобия. Сущность метода заключается в том, что данная задача сводится к задаче на построение фигуры, гомотетичной (подобной) искомой, т.е. отбрасывается какое-нибудь одно из условий, характеризующих размеры искомой фигуры. Потом построенная вспомогательная фигура подвергается преобразованию гомотетии (подобия) так, чтобы после преобразования выполнялось и ранее отброшенное условие. В результате получается искомая фигура.

З а д а ч а 12. Трапецию $ABCD$ (рис. 13.18) пересечь отрезком FH, параллельным основаниям, так, чтобы он разделился диагоналями на равные отрезки FK, KM и MH.

Выясним сначала, сколько решений имеет эта задача. Для этого через точку O пересечения диагоналей BD и AC проведем отрезок F_0H_0, параллельный отрезку BC. Треугольники OH_0D и BCD, BCA и F_0OA подобны, поэтому $F_0O = OH_0$.

Проведем еще несколько отрезков FH, параллельных основаниям трапеции. С увеличением расстояния между прямыми F_0H_0 и FH равные отрезки FK и MH будут уменьшаться от длины отрезка OH_0 до нуля, а отрезок KH увеличиваться от нуля до одного из оснований трапеции. Поэтому существуют два положения отрезка FH, при которых $FK = KM = MH$. На рис. 13.18 этим положениям соответствуют отрезки F_1H_1 и F_2H_2.

Теперь замечаем, что отрезок M_1C является медианой треугольника K_1H_1C. Но треугольники CK_1H_1 и CAD подобны, поэтому точка E принадлежит прямой M_1C $(AE = ED)$. Теперь ясно, что точка M_1 принадлежит прямой F_1H_1 и точка M_1 является пересечением прямых CE и BD.

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что точка K_2 принадлежит прямой F_2H_2 и K_2 есть пересечение отрезков DB и AP $(\overline{BP} = \overline{PC})$.

З а д а ч а 13. Восстановить треугольник ABC по данной точке O — центру описанной окружности, K — точке пересечения его медиан и H — основанию его высоты AH.

Так как угол OMH прямой, то основание M медианы AM принадлежит окружности ω диаметром OH (рис. 13.19). Отметив на окружности ω несколько произвольных точек M_1, M_2, ... и построив соответствующие им медианы M_1A_1, M_2A_2, ... (это можно сделать, потому что $MK : KA = 1:2$), замечаем, что точки A_1, A_2, ... принадлежат окружности ω_1, гомотетичной окружности ω относительно точки K (коэффициент гомотетии равен 2). Теперь ясен план восстановления искомого треугольника ABC (рис. 13.20).

Строим окружность ω. Точка D', гомотетичная точке D относительно точки K (коэффициент гомотетии $k = 2$), является центром окружности ω_1,

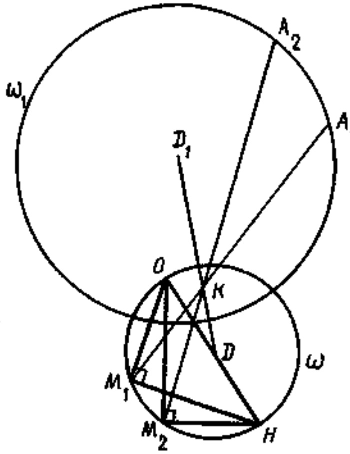


Рис. 13.19

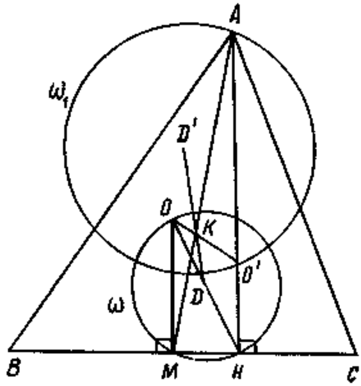


Рис. 13.20

гомотетичной окружности ω относительно центра K ($k = 2$). Искомая вершина A треугольника ABC принадлежит окружности ω_1. Так как отрезок HA гомотетичен отрезку OM относительно центра K ($k = 2$), получаем точку O', гомотетичную точке O относительно центра K ($k = 2$). Искомая вершина A есть пересечение окружности ω_1 и прямой $O'H$. Дальнейшее построение очевидно.

Метод обратности. "В других методах на данных фигурах или каких-нибудь построениях строится искомая фигура или делается какое-либо построение. В методе же обратности на искомой фигуре или на искомых построениях строятся данные фигуры, а затем переносятся на данные фигуры. Иногда на искомом построении приходится строить фигуры не равные, а подобные данным фигурам; построенную фигуру остается перенести на данные фигуры" (*Александров И.И.* Сборник геометрических задач на построение. М., 1954. С. 75).

З а д а ч а 14. Геометрическое место точек C, расстояния от которых до двух данных точек A и B находятся в данном отношении $k \neq 1$, есть окружность определенного радиуса и центра. Доказать.

Пусть отрезок AB расположен относительно прямоугольной системы координат так, как показано на рис. 13.21. Пусть, далее, $C(x;\ y)$ и, для определенности,

$$AC : CB = k > 1. \tag{13.2}$$

Тогда $AC^2 = (x+1)^2 + y^2$ и $CB^2 = (x-1)^2 + y^2$. После этого равенство (13.2) принимает вид

$$(x+1)^2 + y^2 = k^2((x-1)^2 + y^2). \tag{13.3}$$

После понятных преобразований уравнение (13.3) можно записать:

$$\left(x - \frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{4k^2}{(k^2-1)^2}. \tag{13.4}$$

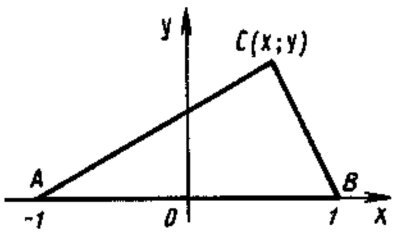


Рис. 13.21

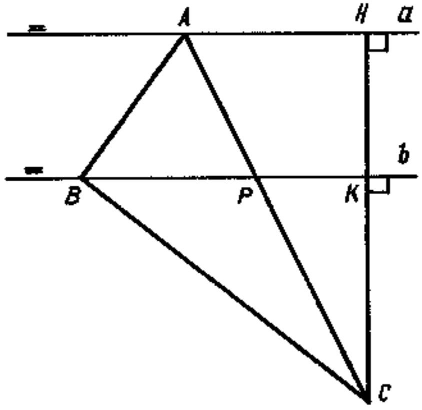


Рис. 13.22

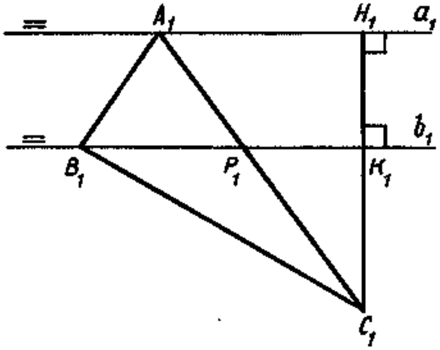


Рис. 13.23

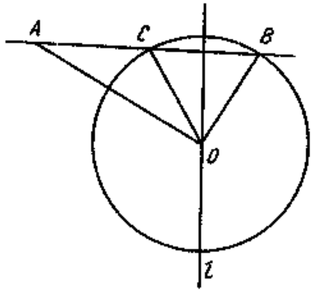


Рис. 13.24

Равенство (13.4) есть уравнение окружности ω, радиус которой равен $\dfrac{2k}{k^2-1}$ ($k>1$) и центр M имеет координаты ($\dfrac{k^2+1}{k^2-1}$; 0).

Задача 15. Даны две параллельные прямые a и b и точка C. Построить треугольник ABC, подобный данному треугольнику $A_1B_1C_1$, вершины A и B которого принадлежат соответственно прямым a и b.

Допустим, что задача решена, т.е. треугольник ABC искомый (рис. 13.22). Проведем через точку C прямую, перпендикулярную к прямым a и b. Она пересекает их в точках H и K.

Пусть $KH=n$, $KC=p$. Тогда $AP:PC=HK:KC=n:p$. Строим данный треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 13.23). На его стороне A_1C_1 отмечаем точку P_1, такую, что $A_1P_1:P_1C_1=n:p$.

Строим прямую B_1P_1 и через точку A_1 проводим прямую a_1, параллельную прямой B_1P_1. Через точку C_1 проводим прямую, перпендикулярную к прямой a_1 (рис. 13.23). Получаем прямоугольный треугольник $A_1H_1C_1$.

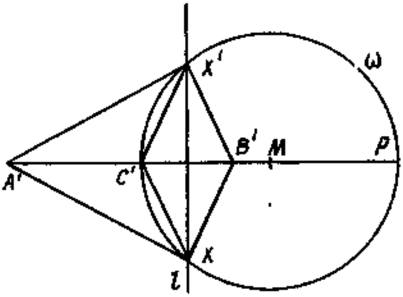


Рис. 13.25

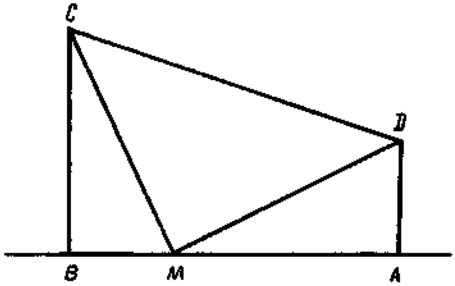


Рис. 13.26

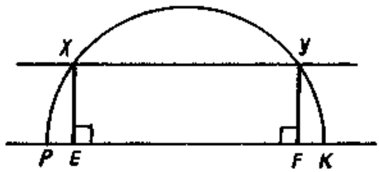


Рис. 13.27

Треугольники $A_1H_1C_1$ (рис. 13.23) и AHC (рис. 13.22) подобны, поэтому $\angle ACH = \angle A_1C_1H_1$. Теперь данная задача сводится к построению угла HCA, равного углу $H_1C_1A_1$.

З а д а ч а 16. Даны окружность (O, R) и вне ее точка A (рис. 13.24). Через точку A провести секущую AB так, чтобы $AC : CB = 2:1$.

Построим произвольный отрезок $A'B'$ и разделим его точкой C' так, чтобы $A'C' : C'B' = 2 : 1$ (рис. 13.25). Построим серединный перпендикуляр l к отрезку $C'B'$.

По условию задачи $OC = R$, известна длина отрезка AO. Пусть $AO = n$. Построим на рис. 13.25 геометрическое место точек X, такое, чтобы $A'X : C'X = n : R$ (см. задачу 1, окружность ω). Окружность ω пересекает прямую l в точках X и X'. Очевидно, что треугольники $A'XB'$ (рис. 13.25) и AOB (рис. 13.24) подобны, поэтому $\angle BAO = \angle B'A'X$.

Таким образом, данная задача свелась к построению угла OAB, равного найденному углу $B'A'X$. (Мы здесь не останавливаемся на исследовании числа решений задачи в зависимости от величины отношения $n : R$.)

Для всех чисто геометрических методов решения конструктивных задач на плоскости характерны дополнительные построения, выполнить которые не всегда просто.

Алгебраический метод решения конструктивных задач обладает большей общностью, не требует дополнительных построений. С его помощью решаются достаточно просто самые сложные задачи на построение.

З а д а ч а 17. На рис. 13.26 изображена прямоугольная трапеция $ABCD$ (AD и BC – ее основания), у которой $AB = 3a$, $AD = a$, $BC = 2a$. Построить на отрезке AB такую точку M, чтобы $\angle AMD - \angle CMB = 45°$. При каких условиях задача имеет решение?

При движении точки M по отрезку AB (от A к B) угол AMD уменьшается от 90° до величины угла ABD, тангенс которого равен 1/3. При том же движении точки M угол CMB увеличивается от угла CAB (его тангенс равен 2/3) до 90°. Отсюда ясно, что задача имеет единственное решение.

Обозначим $\angle AMD = \alpha$, $\angle CMB = \beta$. По условию задачи

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = 1 \text{ или } \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = 1. \qquad (13.5)$$

Обозначим $AM = x \leqslant 3a$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = a/x$ и $\operatorname{tg}\beta = 2a/(3a-x)$. После этого уравнение (13.5) преобразуется к виду

$$x^2 - 6ax + a^2 = 0. \qquad (13.6)$$

Искомый отрезок $x = AM$ можно получить следующим образом (на основании теоремы Виета). Строим полуокружность диаметром $PK = 6a$ (рис. 13.27). На расстоянии a от прямой PK проводим параллельную ей прямую, которая пересекает полуокружность в точках X и Y. Проводим из точек X и Y перпендикуляры XE и YF к прямой PK. Очевидно, что $PE = FK$. Поэтому если x_1 и x_2 — корни уравнения (13.6), то $x_1 = PE$ и $x_2 = EK$. По условию задачи $AM \leqslant 3a$, поэтому $AM = PE$.

14. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

14.1. Поиск решений задач на вычисление

Начинать поиск решения планиметрической задачи на вычисление следует с инструментального построения фигуры, которая максимально соответствует всем условиям задачи. Такой чертеж позволяет выполнить измерения элементов изображения и высказать правдоподобные гипотезы о некоторых свойствах фигуры. В ряде случаев приближенный ответ дает возможность догадаться о его точном значении, избежать вычислительных и логических ошибок. Во многих случаях наличие ответа существенно облегчает поиск плана решения задачи. Предварительное решение вычислительной задачи построением позволяет установить число решений.

Геометрические задачи могут содержать только числовые данные, числовые данные и параметры или только параметры. В зависимости от этого одна и та же задача может быть трудной или достаточно простой. Комплексное использование инструментальных построений, измерений и вычислений содействует приобретению навыков открытия правдоподобных свойств фигур, их анализа, обобщения и применения к решению задач.

Очень важно выделить такие частные случаи (в задачах с параметрами), которые позволяют применить наиболее рациональный общий метод решения задачи.

З а д а ч а 1. В треугольнике ABC (угол B — острый) проведены высоты AD и CE. Найти длину отрезка DE, если $AB = 15$, $AC = 18$, $BD = 10$.

В результате измерений отрезков и углов, изображенных на рис. 14.1, можно предположить, что треугольники BED и BCA подобны. Если это так, то $DE : 18 = 10:15$ и $DE = 12$.

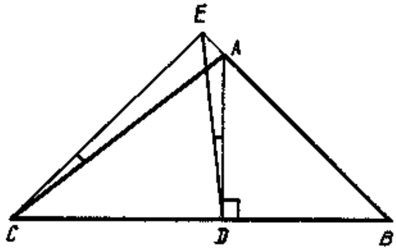


Рис. 14.1

Углы EDA и ECA равны, потому что четырехугольник $ADCE$ вписывается в окружность (противоположные углы этого четырехугольника прямые).

З а д а ч а 2. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Медиана AD продолжена до пересечения с этой окружностью в точке E. Известно, что $AB + AD = DE$, $\angle BAD = 60°$ и $AE = 6$. Найти площадь треугольника ABC (рис. 14.2).

Построим произвольную окружность и на ней отложим дугу BE величиной $120°$. Тогда при любом положении точки A на дуге BmE угол BAE равен $60°$.

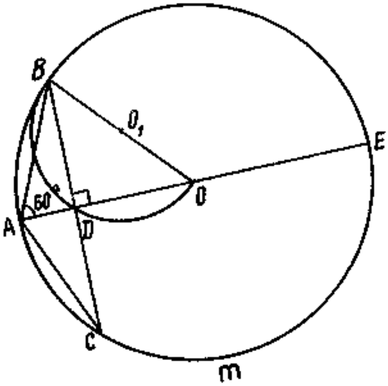


Рис. 14.2

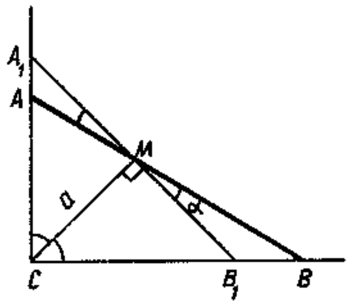


Рис. 14.3

Подберем на дуге BmE такое положение точки A, чтобы $AB + AD = DE$. Полученный чертеж наводит на мысль, что отрезок AE должен быть диаметром окружности, а хорда BC перпендикулярна к прямой AE.

В самом деле, если отрезок AE – диаметр окружности, то $\angle BAC = 120°$ и $\angle ABD = 30°$. Поэтому $AD = 0{,}5AB$, $AD = 0{,}25AE$ и $DE = 0{,}75AE$, т.е. верно равенство $AB + AD = DE$. В этом случае $S(ABC) = 0{,}5BC \cdot AD = BD \cdot AD = AB \times \sin 60° \cdot AB \sin 30° = 9\sqrt{3}/4$. Легко доказать, что это решение единственное.

З а д а ч а 3. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника равна a (рис. 14.3). При каких величинах острых углов треугольника его гипотенуза будет наименьшей?

Построим прямой угол C и его биссектрису. Отложим на ней отрезок CM длиной a. Проведя несколько прямых через точку M, заметим, что гипотенуза наименьшая в том случае, когда она перпендикулярна к прямой CM, т.е. если каждый острый угол треугольника ACB равен $45°$. Докажем, что это предположение верно.

Очевидно, что $A_1M = MB_1 = a$, если отрезок A_1B_1 перпендикулярен к прямой CM. Обозначим $\angle AMA_1 = \alpha$. Тогда $\angle A_1AM = 180° - 45° - \alpha = 135° - \alpha$, $\angle MBB_1 = 180° - 135° - \alpha = 45° - \alpha$.

По теореме синусов

$$AM : \sin 45° = A_1M : \sin(135° - \alpha);$$

$$MB : \sin 135° = MB_1 : \sin(45° - \alpha).$$

Отсюда $AM = a\sin 45° : \sin(45° + \alpha)$, $MB = a\sin 45° : \sin(45° - \alpha)$ и

$f(\alpha) = AM + MB = 0{,}5a\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sin(45° + \alpha)} + \dfrac{1}{\sin(45° - \alpha)}\right)$. Теперь с помощью производной легко доказать, что $\alpha = 0$.

З а д а ч а 4. Продолжения высот AM и CN остроугольного треугольника ABC пересекают описанную вокруг него окружность в точках P и Q (рис.14.4).

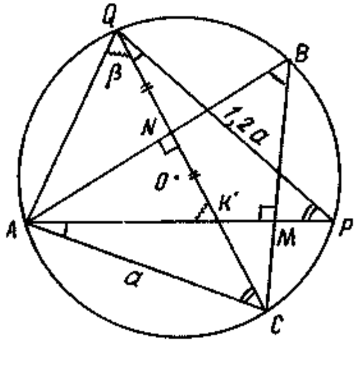


Рис. 14.4

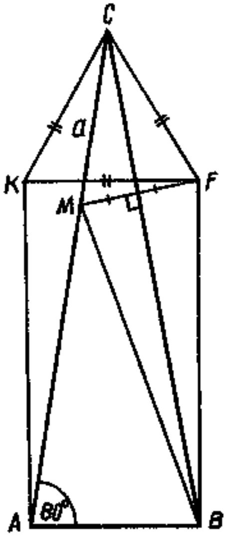


Рис. 14.5

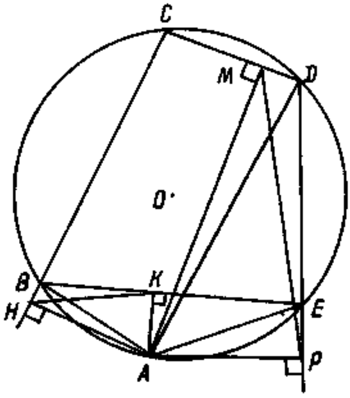


Рис. 14.6

Найти радиус окружности, описанной вокруг этого треугольника, если $AC = a$ и $PQ = 1{,}2a$.

Треугольники QKP и AKC подобны, поэтому $QK : AK = 1{,}2$.

Строим отрезок AQ. Очевидно, что углы AQK, AKQ и ABC равны, поэтому $QN = NK$. Теперь ясно, что $NK : AK = 3:5$, т.е. $\cos\beta = 0{,}6$. Итак, $R = a/(2 - \sqrt{1 - 9/25}) = 5a/8$.

З а д а ч а 5. В треугольнике ABC $\angle ACB = 20°$, $AC = CB$, $CM = AB$. Точка M принадлежит отрезку AC. Найти угол ABM (рис. 14.5).

Построив треугольник ACB и выполнив инструментальные измерения, получим гипотезу: $\angle ABM = 70°$, $\angle AMB = 30°$, $\angle MBC = 10°$ и т.д.

На рисунке изображены (по гипотезе) углы, равные 10°, 30°, 70°, 80° и др. Замечаем, что $10° + 80° = 90°$, $70° + 20° = 90°$, $20° + 20° + 20° = 60°$. В результате анализа появляется план поиска доказательства утверждения, что $\angle ABM = 70°$.

Достроим данный треугольник ABC до такого многоугольника, у которого есть только "хорошие" углы (60°, 90°, 150° и т.п.). В результате различных комбинаций появляется пятиугольник $CKABF$. После этого утверждение задачи очевидно.

З а д а ч а 6. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от вершины A до прямых BC, CD, DE равны соответственно a, b, c. Найти расстояние h от точки A до прямой BE (рис. 14.6).

Построим произвольную окружность и впишем в нее какой-нибудь пятиугольник $ABCDE$. Из вершины A проведем перпендикуляры AH, AK, AM, AP соответственно к прямым BC, BE, CD, DE. Измерив масштабной линейкой отрезки AH, AK, AM, AP, получим гипотезу, что $h : a = c : b$.

Построим еще какой-либо пятиугольник, вписанный в окружность, и, выполнив соответствующие измерения, снова получим: $h : a \approx c : b$.

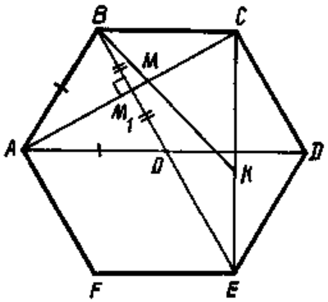


Рис. 14.7

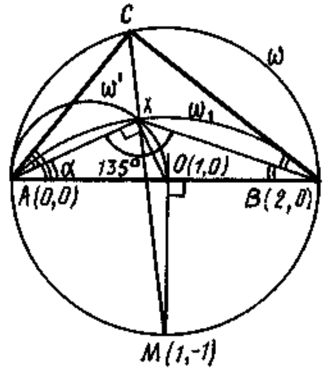


Рис. 14.8

Итак, получается рабочая гипотеза: искомая величина h и данные величины a, b, c удовлетворяют равенству

$$h : a = c : b. \tag{14.1}$$

Равенство (14.1) наводит на мысль, что треугольники HAK и MAP подобны. Измерения соответствующих углов "подтверждают" эту гипотезу.

В четырехугольниках $AHBK$ и $AMDP$ по два прямых угла и $\angle CBE + \angle CDE = 180°$. Поэтому $\angle HBK = \angle MDE$, $\angle HAK = \angle MAP$, $\angle HBA = \angle MDA$. Отсюда следует, что треугольники AHB и AMD, ABK и ADP подобны.

Итак, трапеции $AHBK$ и $AMDP$ подобны. Поэтому подобны треугольники HAK и MAP и, следовательно, $h = ac : b$.

Задача 7. На диагоналях AC и CE правильного шестиугольника $ABCDEF$ взяты соответственно точки M и K, такие, что $AM : AC = CK : CE = n$ (рис. 14.7). Известно, что точки B, M и K лежат на одной прямой. Найти n.

При движении точки K по диагонали EC (от E к C) отношение $CK : CE$ уменьшается от 1 до 0, а отношение $AM : AC$ увеличивается от $AM_1 : AC = 0{,}5$ до 1. Поэтому на диагонали CE существует единственная точка K, такая, что

$$AM : AC = CK : CE. \tag{14.2}$$

Методом проб получаем гипотезу, что равенство (14.2) верно, если $AM = AB$. Попытаемся доказать ее.

Итак, пусть $AM = AB = 1$. Тогда $AC = 2\sin 60° = \sqrt{3}$ и $MC = \sqrt{3} - 1$. Из равнобедренного треугольника ABM получаем: $\angle ABM = \angle AMB = 75°$. Поэтому $\angle CMK = 75°$, $\angle MCK = 60°$, $\angle MKC = 45°$.

Из треугольника MCK по теореме синусов находим

$$MC : \sin 45° = CK : \sin 75°.$$

Отсюда

$$CK = MC \sin 75° : \sin 45° = (\sqrt{3} - 1)\sin(45° + 30°) : \sin 45° =$$
$$= (\sqrt{3} - 1)\,\frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 1.$$

Теперь ясно, что $n = \sqrt{3}/3$.

Задача 8. Найти отношение катетов CB и CA прямоугольного треугольника ACB, если известно, что одна половина гипотенузы (от ее середины до вершины) видна из центра X вписанной окружности под прямым углом.

Очевидно, что угол AXB равен $135°$ (рис. 14.8). Поэтому точка X есть точка пересечения окружностей, описанных вокруг треугольника AXB и прямоугольного треугольника AXO ($\overline{AO} = \overline{OB}$). После этого понятно построение треугольника, подобного треугольнику ACB: строим произвольный отрезок AB; делим точкой O его пополам; строим окружность ω радиусом OA с центром в точке O; строим дугу ω_1 окружности, которая стягивается хордой AB и в которую вписывается угол $135°$; строим полуокружность ω' диаметром AO; точка X есть точка пересечения фигур ω_1 и ω'; через точку O проводим прямую, перпендикулярную к прямой AB, и на ней откладываем отрезок OM, равный AO (точка M не принадлежит полуокружности, в которой находится фигура ω_1); третья вершина C прямоугольного треугольника ABC есть точка пересечения прямой MX с окружностью ω.

Пусть $A(0;\ 0)$, $O(1;\ 0)$, $B(2;\ 0)$ и $M(1;\ -1)$. Тогда уравнение окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника OXA, имеет вид

$$(x-0{,}5)^2 + y^2 = 0{,}25. \tag{14.3}$$

Находим радиус R окружности, описанной вокруг треугольника AXB: $R = AB/2\sin 135° = \sqrt{2}$. Ясно, что центром этой окружности является точка $M(1;\ -1)$, а ее уравнение имеет вид

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2. \tag{14.4}$$

Решив систему уравнений (14.3) и (14.4), получим $X(0{,}8;\ 0{,}4)$, а это означает, что $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\angle XAB = 0{,}5$ и $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{4}{3}$. Отсюда $CB : CA = 4 : 3$.

Задача 9. Биссектрисы AM и BH треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $AO : MO = \sqrt{3}$ и $HO : BO = \sqrt{3} - 1$. Найти углы треугольника ABC.

Считаем треугольник BOA изображением равнобедренного треугольника BOA с углом BOA, равным $120°$. Строим такой треугольник BOA (рис. 14.9). На продолжении отрезка BO (за точку O) откладываем отрезок $HO = (\sqrt{3} - 1)BO$. На продолжении отрезка AO (за точку O) откладываем отрезок $OM = AO : \sqrt{3}$. Прямые BM и AH пересекаются в точке C. Построенный таким образом треугольник ABC является изображением треугольника, углы которого нужно найти. Отрезки BH и AM являются изображением его биссектрис.

Инструментальные измерения на рис. 14.9 дают следующие результаты: $AH : HC \approx 1 : 1{,}73$ и $BM : MC \approx 1 : 2$, но $\sqrt{3} \approx 1{,}73$, и это позволяет выдвинуть гипотезу: в исследуемом треугольнике ABC

$$AB : BC = AH : HC = 1 : \sqrt{3};\quad AB : AC = BM : MC = 1 : 2;$$
$$AB : BC : AC = 1 : \sqrt{3} : 2. \tag{14.5}$$

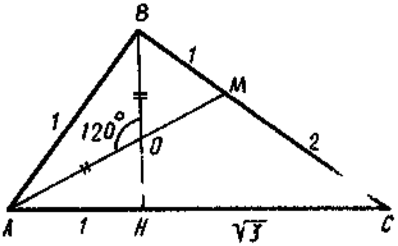


Рис. 14.9

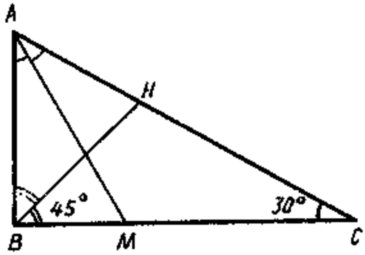


Рис. 14.10

Если равенства (14.5) верны, то $AB^2 : BC^2 : AC^2 = 1:3:4$, т.е. треугольник ABC должен быть прямоугольным ($\angle B$ – прямой, $\angle C = 30°$, $\angle A = 60°$).

Из изложенного ясно, что задача имеет единственное решение. Поэтому остается только доказать, что прямоугольный треугольник ABC, у которого $\angle C = 30°$ и $\angle A = 60°$, удовлетворяет условию задачи.

Пусть $AM = MC = 1$ (рис. 14.10). Тогда $AB = 0{,}5\sqrt{3}$, $BM = 0{,}5$, $BC = 1{,}5$, $AC = \sqrt{3}$.

Согласно свойству биссектрисы угла треугольника, $AO : OM = AB : BM = \sqrt{3}$. Далее, $AH : HC = AB : BC = 1 : \sqrt{3}$ и $AH = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}} AC = 0{,}5\,(3 - \sqrt{3})$. Поэтому $OH : OB = AH : AB = \sqrt{3} - 1$.

Таким образом, доказано, что треугольник ABC является прямоугольным, угол C которого равен 30°.

14.2. Поиск решений задач на доказательство

Поиск решения задач на доказательство включает следующие этапы: а) построение фигуры, в максимально возможной степени отвечающей всем условиям задачи (как по форме, так и по аккуратности исполнения чертежа); б) инструментальный поиск свойств фигуры. Доказательство справедливости или ложности полученных гипотез. В затруднительных случаях доказательство гипотез целесообразно вести методом полной индукции; в) инструментальное построение множества точек, которому принадлежит та точка, свойства которой используются для обоснования решения задачи. Доказательство свойств этого множества; г) применение всех или части обнаруженных и обоснованных свойств фигуры при доказательстве сформулированного в задаче свойства этой фигуры.

З а д а ч а 1. В окружность вписан правильный треугольник ABC (рис. 14.11). На дуге AmC этой окружности отмечена произвольная точка X. Доказать, что $AX + XC = BX$.

Естественно на продолжении хорды AX (за точку X) построить отрезок $XY = XC$.

Теперь задача сводится к доказательству равенства отрезков AY и BX. Первый из них является стороной треугольника ACY, а второй – стороной треугольника BXC. Инструментальные измерения подсказывают, что эти тре-

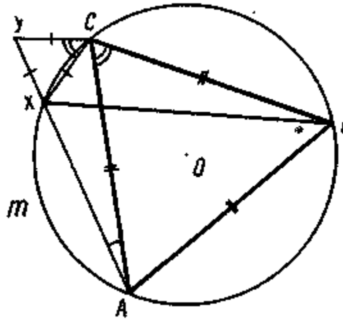


Рис. 14.11

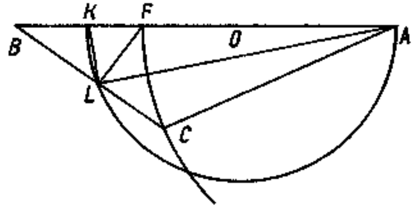


Рис. 14.12

угольники равны. Почему? Во-первых, углы YAC и XBC равны как углы, вписанные в окружность и опирающиеся на одну и ту же хорду. Во-вторых, стороны AC и BC равны по условию задачи.

Измерения с помощью транспортира позволяют заметить, что равны углы ACY и BCX, XCY и ACB. Аккуратный чертеж наводит на мысль, что треугольник XCY правильный. Почему?

По построению $XY = XC$. Сумма углов AXC и ABC равна 180° (сумма противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность). Но $\angle ABC = 60°$, поэтому $\angle AXC = 120°$ и $\angle CXY = 60°$. Итак, углы XCB и ACY равны: $\angle BCX = 60° + \angle ACX$, $\angle ACY = \angle ACX + 60°$.

Таким образом, треугольники ACY и BCX равны. Утверждение задачи доказано.

З а д а ч а 2. В треугольнике ABC сторона $AB = 15$, $AC = 10$. Доказать, что длина биссектрисы AL угла BAC не больше 12.

Построим несколько треугольников ABC_n с общей стороной AB и третьей вершиной C_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), таких, что $AB = 15$, $AC = 10$ (рис. 14.12). Точки C_n принадлежат полуокружности (A, AC). Построим биссектрисы AL_n треугольников ABC_n. Точки L_n принадлежат полуокружности KL_nA, диаметр которой равен 12 (гипотеза!).

Теперь остается доказать или опровергнуть полученную гипотезу. В результате измерения обнаруживаем, что $\angle KLA = 90°$, $\angle KLF = \angle BLK$ (точка F есть пересечение окружности (A, AC) и отрезка AB), $\angle FLA = \angle ALC$.

Докажем обнаруженные свойства. Во-первых, $BL : LC = 15 : 10 = 3x : 2x$ и очевидно, что $LF = LC = 2x$. Во-вторых, если $KA = 12$, то $KF = 2$ и $BK = 3$. Отсюда ясно, что $\angle BLK = \angle KLF$, так как $BL : LF = 3x : 2x = 3 : 2$ и $BK : KF = 3 : 2$. Теперь понятно, что $\angle KLA = 90°$. Задача решена.

З а д а ч а 3. Точка P лежит внутри квадрата $ABCD$. Отрезки AK, BM, CH, DT перпендикулярны соответственно к прямым BP, CP, DP, AP. Доказать, что прямые AK, BM, CH и DT пересекаются в одной точке X.

Аккуратно выполненный чертеж "подтверждает" условие задачи (рис. 14.13). Через точки P и X проводим прямые, параллельные сторонам квадрата. Получаем отрезки PL, PO, PR, PN, FX, XQ, XY, XE. Измерив их, приходим к следующей гипотезе: $FX = LP$, $BL = AF$, $BE = LP$, $LC = EX$, $EX = PN$, $DN = EC$, $YD = AR$, $PR = YX$. Если это так, то треугольники BLP и AFX, BEX

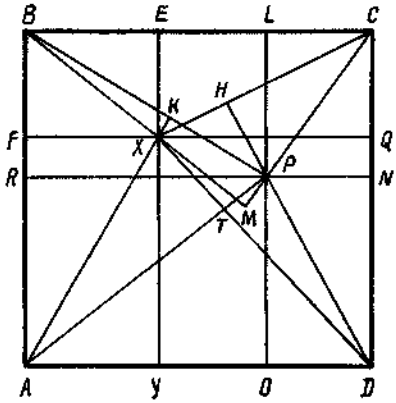


Рис. 14.13

и PLC, XEC и PND, ARP и DYX равны между собой.

Итак, мы пришли к предположению, что точка X обладает следующими свойствами: $XY = PR$ и $XQ = PO$. Поэтому данную задачу можно заменить такой: доказать, что если $XY = PR$ и $XQ = PO$, то прямые AX и BP, BX и CP, CX и PD, DX и AP взаимно перпендикулярны.

Это свойство точки X очевидно. Например, прямые AX и BP взаимно перпендикулярны, так как из подобия треугольников BLP и AFX следует равенство углов LBP и FAX. Но луч BL перпендикулярен к лучу AF, поэтому луч BP перпендикулярен к лучу AX.

Задача 4. Дан произвольный неравнобедренный треугольник ABC. Отрезки AL, BR, CF — это биссектрисы. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон в точках E, D, H (рис. 14.14). Точки H', D', E' симметричны точкам H, D, E относительно прямых AL, CF, BR (соответственно). Векторы $\overline{BK} = \overline{KC}$, $\overline{AP} = \overline{PC}$, $\overline{AM} = \overline{MB}$. Доказать, что прямые KH', MD' и PE' имеют общую точку T.

Эта задача предлагалась на XXIII Международной математической олимпиаде школьников.

По поводу нее в журнале "Математика в школе" (№ 3, 1983 г., с. 50) говорилось: "Наиболее низкий результат по этой задаче отражает в какой-то мере наблюдающиеся в школе в последнее время трудности с геометрией. В связи с этим хотелось бы порекомендовать учителю в обучении математике на уроке и во внеклассной работе уделять больше внимания развитию логического мышления с использованием геометрических образов и геометрических методов, предъявлять больше требований к выполнению точного и четкого чертежа, сопровождающего теорию или задачу".

Аккуратно выполненный чертеж и измерения отрезков и углов позволяют высказать следующие гипотезы:

1) точка T принадлежит окружности, вписанной в треугольник ABC;

2) отрезок $D'H'$ параллелен отрезку MK;

3) отрезок $D'E'$ параллелен отрезку MP;

4) отрезок $E'H'$ параллелен отрезку PK;

5) треугольник $D'H'E'$ гомотетичен треугольнику MKP относительно точки T;

6) $TM' + TE' = TH'$;

7) $\angle H'NE' = 2\angle ACB$;

8) $\angle D'NH' = 2\angle ABC$;

9) $\angle D'NE' = 2\angle BAC$;

10) $\angle H'TE' = \angle ACB$;

11) стороны треугольника $D'H'E'$ параллельны соответствующим сторонам треугольника ACB.

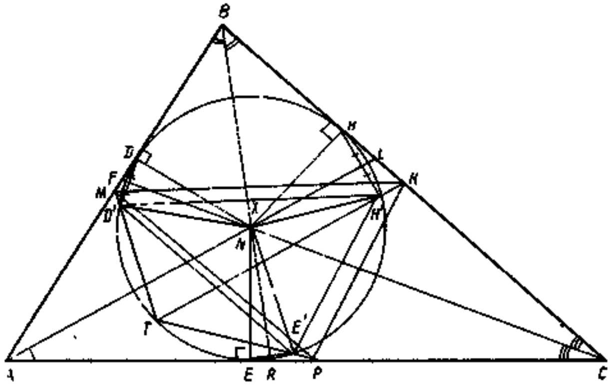


Рис. 14.14

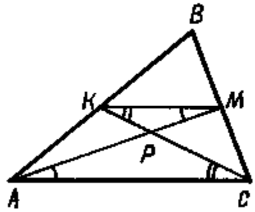


Рис. 14.15

Но как доказать эти правдоподобные свойства фигур, изображенных на рис. 14.14, и как и какие из них использовать для решения задачи?

Свойства 7, 8, 10 легко подтверждаются вычислениями. В результате получаем равенства: $\angle PMK = \angle E'D'H'$, $\angle MKP = \angle D'H'E'$, $\angle MPK = \angle D'E'H'$.

Треугольник $D'NH'$ равнобедренный. Поэтому

$$\angle D'H'N = \angle ND'H' = 90^\circ - 0,5\angle D'NH' = 90^\circ - \angle ABC. \qquad (14.6)$$

Далее,

$$D'NB = \angle DNB + 2\angle FND = (90^\circ - 0,5\angle ABC) +$$
$$+ 2(90^\circ - \angle BFN) = (90^\circ - 0,5\angle ABC) +$$
$$+ 2(90^\circ - (180^\circ - \angle ABC - 0,5\angle ACB)) = 90^\circ + 0,5\angle ABC -$$
$$- \angle BAC. \qquad (14.7)$$

Из равенств (14.6) и (14.7) следует

$$\angle D'XB = \angle ND'H' + \angle D'NB = (90^\circ - \angle ABC) + (90^\circ +$$
$$+ 0,5\angle ABC - \angle BAC) = 180^\circ - 0,5\angle ABC - \angle BAC.$$

Теперь ясно, что отрезок $D'H'$ параллелен средней линии MK треугольника ABC.

Таким образом, доказано, что если точка T есть пересечение прямых $E'P$ и MD, то через нее проходит и прямая KH'.

Доказательство геометрических утверждений часто можно существенно упростить путем выполнения целесообразных дополнительных построений.

З а д а ч а 5. Дан произвольный треугольник ABC. Отрезки AM и CK — его медианы, которые пересекаются в точке P (рис. 14.15). Доказать, что $MP : AP = KP : PC = 1 : 2$.

Достаточно соединить точки K и M отрезком, чтобы задача стала устной. В самом деле, средняя линия KM треугольника ABC параллельна прямой AC, и $KM : AC = 1 : 2$. Треугольники PKM и PCA подобны. Отсюда следует утверждение задачи.

14.3. Поиск решений конструктивных задач

Решение конструктивной задачи с помощью циркуля и линейки можно разделить на следующие этапы:

1) построение любыми конструктивными средствами фигуры, отвечающей всем условиям задачи;

2) обнаружение с помощью измерительных инструментов правдоподобных свойств фигуры, доказательство истинности или ложности этих свойств;

3) инструментальное построение множеств точек, пересечения которых могут быть решением задачи, и установление их свойств;

4) отыскание пути решения задачи с помощью тех свойств фигуры, о которых сказано в пп. 2 и 3.

Особое значение для отыскания путей решения задач имеют аккуратно выполненные построения и измерения, результаты которых позволяют высказать правдоподобную гипотезу о некоторых свойствах фигуры.

З а д а ч а 1. Дан угол AOB и внутри него точка M (рис. 14.16). Построить такую прямую l, проходящую через точку M и пересекающую луч OA в точке K и луч OB в точке P, что $KM : MP = 2:3$.

Отметим на луче OA произвольные точки $K_1, K_2, K_3, \ldots$ и построим лучи $K_1M, K_2M, K_3M, \ldots$ Построим на этих лучах такие точки $P_1, P_2, P_3, \ldots$, что $K_1M : MP_1 = 2:3$, $K_2M : MP_2 = 2:3$, $K_3M : MP_3 = 2:3, \ldots$ Нетрудно заметить, что точки $P_1, P_2, P_3, \ldots$ принадлежат некоторой прямой l_1, параллельной прямой OA. Если это так, то искомая точка P есть пересечение прямой l_1 и луча OB. Задача решена, так как построение прямой l_1 и доказательство того, что точка P есть пересечение прямой l_1 и луча OB является искомой точкой, достаточно просты по сравнению с данной задачей.

З а д а ч а 2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK, BP, CH, которые пересекаются в точке O. Окружность (O, r) лежит внутри треугольника ABC. Построить треугольник $A_1B_1C_1$, описанный вокруг окружности (O, r), вершины которого принадлежат сторонам треугольника ABC.

Метод поиска решения, использованный в задаче 1, здесь не приводит к цели. Поэтому поступаем следующим образом. Подбором строим искомый треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 14.17). Измерив углы на рисунке, приходим к ги-

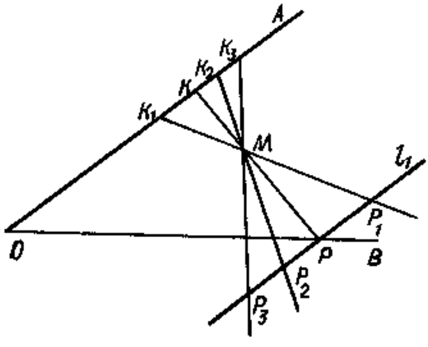


Рис. 14.16

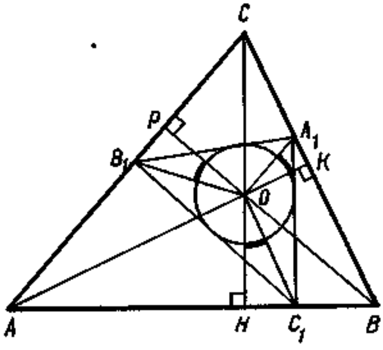


Рис. 14.17

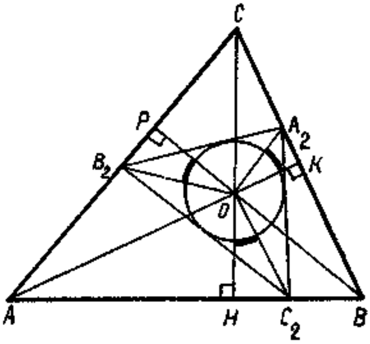


Рис. 14.18

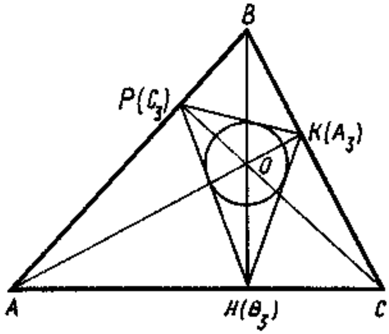


Рис. 14.19

потезе, что углы A_1OK, B_1OP и C_1OH равны между собой. Однако не удается установить, как величины этих углов зависят от известных углов, показанных на рис. 14.17. Поэтому построим окружность (O, r_1), радиус которой отличен от радиуса r данной окружности, и путем подбора построим треугольник $A_2B_2C_2$ (рис. 14.18). В результате инструментальных измерений формулируем гипотезы: равны между собой углы A_2OK, B_2OP и C_2OH; $B_2A_2C_2$ и $B_1A_1C_1$; $A_2B_2C_2$ и $A_1B_1C_1$; $A_2C_2B_2$ и $A_1C_1B_1$.

Итак, отсюда следует новая гипотеза: все треугольники, вписанные в треугольник ABC и описанные вокруг различных окружностей с центром O, подобны.

Построив треугольник PKH (рис. 14.19) и произведя соответствующие измерения, получим еще одну гипотезу: в треугольник PKH вписывается окружность с центром в точке O, и треугольник KPH подобен треугольникам $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$.

Таким образом, задача свелась к обоснованию следующей гипотезы: искомый треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику KPH. После доказательства этой гипотезы решение данной задачи очевидно.

14.4. Метод координат

Метод координат упрощает поиски решений задачи школьной геометрии. Чаще всего используются уравнения прямой и окружности, формула длины отрезка, условие перпендикулярности двух прямых. Объем вычислений зависит от того, насколько удачно расположена исследуемая фигура относительно прямоугольной системы координат.

З а д а ч а 1. В трапеции $ABCD$ отрезки BC и AD являются ее основаниями; $BC = 9{,}5$, $AD = 20$, $AB = 5$, $CD = 8{,}5$. Найти ее площадь.

Для решения задачи необходимо найти длину высоты этой трапеции. Расположим трапецию $ABCD$ относительно прямоугольной системы координат так, как это показано на рис. 14.20. Тогда $A(0;\ 0)$, $D(20;\ 0)$, $B(x;\ y)$, $C(x + 9{,}5;\ y)$. По условию задачи

$$AB^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 = 25; \tag{14.8}$$

$$CD^2 = (x + 9{,}5 - 20)^2 + (y-0)^2 = 72{,}25. \tag{14.9}$$

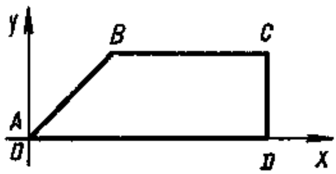


Рис. 14.20

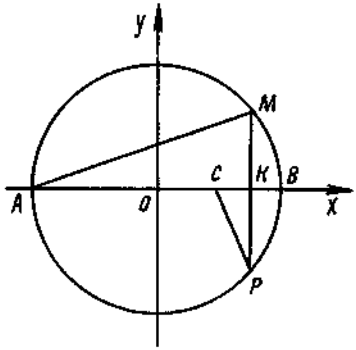


Рис. 14.21

В результате упрощений система уравнений (14.8) и (14.9) принимает вид:

$$x^2+y^2=25; \qquad (14.10)$$

$$(x-10{,}5)^2+y^2=72{,}25. \qquad (14.11)$$

После почленного вычитания уравнения (14.10) из уравнения (14.11) имеем

$$(x-10{,}5)^2-x^2=47{,}25.$$

Отсюда $x=3$. Так как трапеция $ABCD$ расположена в верхней полуплоскости (рис. 14.20), то $y=4$, т.е. высота трапеции $ABCD$ равна 4.

Итак, $S(ABCD)=0{,}5\,(9{,}5+20)\;4=59$.

З а д а ч а 2. Дана окружность с центром O и диаметром $AB=4$. Точка C — середина радиуса OB (рис. 14.21). Построить на окружности точки M и P, симметричные относительно прямой AB, так, чтобы отрезок CP был перпендикулярен к отрезку AM.

Расположим окружность относительно координатных осей так, как показано на рис. 14.21. Тогда $A(-2;\ 0)$, $B(2;\ 0)$, $C(1;\ 0)$.

Пусть $M(x;\ y)$. Тогда $P(x;\ -y)$.

По условию задачи прямые AM и CP взаимно перпендикулярны. Поэтому

$$\overline{AM}\cdot\overline{CP}=0. \qquad (14.12)$$

Находим координаты векторов: $\overline{AM}=(x+2;\ y)$, $\overline{CP}=(x-1;\ -y)$.

После этого уравнение (14.12) принимает вид

$$(x+2)\;(x-1)-y^2=0. \qquad (14.13)$$

Уравнение данной окружности

$$x^2+y^2=4. \qquad (14.14)$$

Выполнив почленное сложение уравнений (14.13) и (14.14), получим уравнение $2x^2+x-2=4$. Его корни $x_1=-2$, $x_2=1{,}5$.

Теперь понятно, что для построения искомых точек M и P нужно провести через середину K отрезка CB прямую, перпендикулярную к прямой AB. Она пересекается с окружностью в точках M и P.

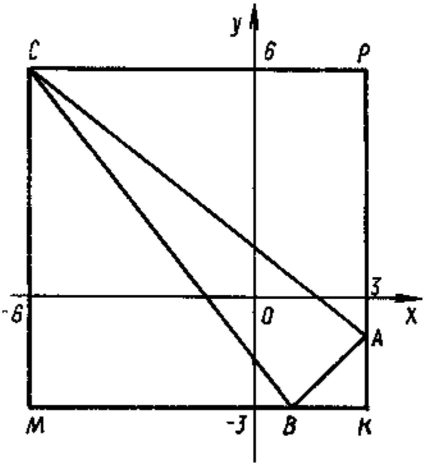


Рис. 14.22

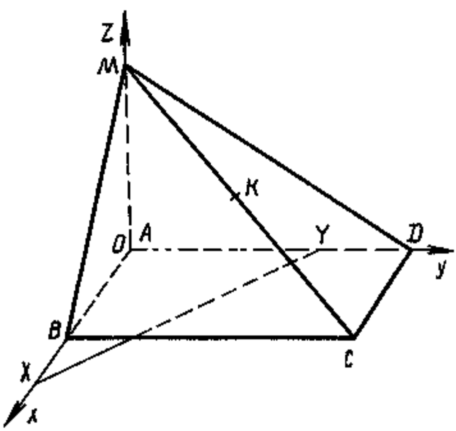


Рис. 14.23

З а д а ч а 3. Найти площадь треугольника ABC, если $A(3;\ -1)$, $B(1;\ -3)$, $C(-6;\ 6)$.

Достроим треугольник ABC до прямоугольника $CMKP$ (рис. 14.22). Очевидно, что $S(ABC) = S(CPKM) - S(CMB) - S(BAK) - S(ACP) = 9\cdot 9 - 0{,}5\cdot 9\cdot 6 - 0{,}5\cdot 2\cdot 2 - 0{,}5\cdot 9\cdot 7 = 20{,}5$.

З а д а ч а 4. Основанием четырехугольной пирамиды $MABCD$ является прямоугольник $ABCD$, у которого $AB = 3$, $AD = 4$, $AM = 2$, причем ребро AM перпендикулярно к плоскости основания пирамиды. Плоскость P проходит через середину K ребра MC и перпендикулярна к этому ребру. Плоскость P пересекает прямые AB и AD в точках X и Y. Вычислить длину отрезка XY.

Начало прямоугольной системы координат совместим с вершиной A пирамиды, направление координатных осей показано на рис. 14.23. В этой системе координат $M(0;\ 0;\ 2)$, $C(3;\ 4;\ 0)$. Составим уравнение плоскости P. Так как $MK = KC$, то, согласно определению плоскости, перпендикулярной к прямой, получаем $EM = EC$, если $E(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка плоскости P. Применив формулу расстояния между точками, находим:

$$EM^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2;$$

$$EC^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-0)^2.$$

Так как $EM = EC$, то $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2$ или после упрощения имеем уравнение плоскости P:

$$4z - 8y - 6x + 21 = 0. \qquad (14.15)$$

Точка X принадлежит оси абсцисс, поэтому $X(x_1;\ 0;\ 0)$. Для определения x_1 в уравнение (14.15) вместо y и z подставляем нули. Получаем $x_1 = 3{,}5$.

Точка y принадлежит оси ординат, поэтому $Y(0;\ y_1;\ 0)$. Для определения y_1 в уравнение (14.15) вместо x и z подставим нули. Получаем $y_1 = 2{,}625$. Итак, $AX = 3{,}5$; $AY = 2{,}625$. Применив теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику XAY, находим $XY \approx 4{,}8$.

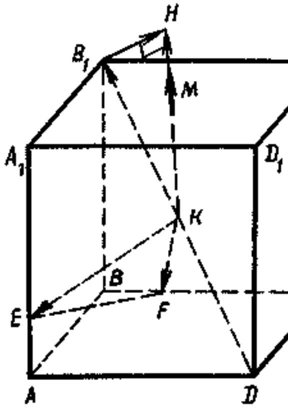


Рис. 14.24

Задача 5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого ребро равно 1. Точка E принадлежит ребру AA_1 и $AE : AA_1 = 1:3$. Точка F принадлежит ребру BC, и $BF : BC = 1:4$. Точка K – середина диагонали B_1D куба. Найти расстояние h от точки B_1 до плоскости KEF (рис. 14.24).

Расположим прямоугольную систему координат относительно данного куба следующим образом: $A(0;\ 0;\ 0)$, $D(1;\ 0;\ 0)$, $B(0,\ 1;\ 0)$, $A_1\ (0;\ 0;\ 1)$. Тогда $B_1\ (0;\ 1;\ 1)$, $K(1/2;\ 1/2;\ 1/2)$, $E(0;\ 0;\ 1/3)$, $F\ (1/4;\ 0;\ 0)$. Найдем координаты какого-либо вектора, перпендикулярного к плоскости EKF. Пусть, например, $\overline{KM}$ перпендикулярен к плоскости EKF, где $M(0;\ n;\ m)$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\overline{KM}\cdot\overline{KE} = 0; \\ &\overline{KM}\cdot\overline{KF} = 0, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} &(-0{,}5;\ n-0{,}5;\ m-0{,}5)\ (-0{,}5;\ -0{,}5;\ -1/6) = 0; \\ &(-0{,}5;\ n-0{,}5;\ m-0{,}5)\ (-0{,}25;\ 0{,}5;\ -0{,}5) = 0, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} &0{,}25 - 0{,}5\,(n-0{,}5) - \frac{1}{6}\,(m-0{,}5) = 0; \\ &0{,}125 + 0{,}5\,(n-0{,}5) - 0{,}5\,(m-0{,}5) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Решив последнюю систему уравнений, получим: $m = 17/16$ и $n = 13/16$, т.е. $M(0;\ 13/16;\ 17/16)$.

Проводим из точки B_1 перпендикуляр B_1H к прямой KM (рис. 14.24). Очевидно, что $h = HK$. Пусть $\overline{KH} = \alpha\overline{KM}$. Тогда $\overline{KH} = \alpha(-1/2;\ 13/16 - 1/2;\ 17/16 - 1/2) = \alpha(-1/2;\ 5/16;\ 9/16)$. Значение α найдем из уравнения $\overline{B_1H} \times \overline{KH} = 0$ или $(\overline{KH} - \overline{KB_1})\,\overline{KH} = 0$. Последнее уравнение в координатной форме имеет вид

$$\left(\left(-\frac{\alpha}{2};\ \frac{5\alpha}{16};\ \frac{9\alpha}{16}\right) - \left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)\right) \times$$
$$\times\,\alpha\left(-\frac{1}{2};\ \frac{5}{16};\ \frac{9}{16}\right) = 0.$$

Так как очевидно, что $\alpha \neq 0$, это уравнение упрощается:

$$(-0{,}5\alpha + 0{,}5)\,(-0{,}5) + (0{,}3125\alpha - 0{,}5)\,0{,}3125 +$$
$$+ (0{,}5625\alpha - 0{,}5)\,0{,}5625 = 0.$$

Отсюда $\alpha = \dfrac{88}{85}$, $\overline{KH} = \dfrac{88}{85}\left(-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{5}{16};\ \dfrac{9}{16}\right)$;

$$\overline{KH}^2 = \left(\frac{88}{85}\right)^2\left(\frac{1}{4} + \frac{25}{256} + \frac{81}{256}\right) = \frac{121}{170};\ h = KH = \frac{11}{\sqrt{170}}.$$

Таким образом, получаем $h = 11/\sqrt{170}$.

14.5. Алгебраический метод

Алгебраическое решение геометрических задач заключается в следующем. Искомые элементы геометрических фигур обозначают x, y, ... По условию задачи составляются уравнения (неравенства), связывающие известные и неизвестные элементы фигур. После этого решается полученная система уравнений (неравенств). Затем определяются те элементы или отношения между ними, которые требуется найти.

В методическом отношении такое решение геометрических задач является одним из наиболее простых. Метод уравнений используется при решении широкого круга задач. Удачный выбор неизвестных позволяет получить несложную систему уравнений (неравенств).

Задача 1. Площадь треугольника ABC равна 16. Векторы $\overline{BM} = \overline{MC}$, $\overline{AK} = \overline{KC}$, $AM = 6$, $BK = 4$. Доказать, что прямая AM перпендикулярна к прямой BK.

Пусть медианы BK и AM треугольника ABC пересекаются в точке P (рис. 14.25). Обозначим $\angle APB = \alpha$. Площадь четырехугольника $ABMK$ можно вычислить по формуле

$$S(ABMK) = 0{,}5AM\cdot BK\sin\alpha. \tag{14.16}$$

Треугольник CMK подобен треугольнику CBA (его средняя линия MK параллельна стороне AB). Поэтому $S(MKC) = 0{,}25S(ABC) = 0{,}25\cdot 16 = 4$, а $S(ABMK) = 16 - 4 = 12$. После этого уравнение (14.16) преобразуется к виду $12 = 0{,}5\cdot 6\cdot 4\sin\alpha$. Отсюда $\sin\alpha = 1$ и $\alpha = 90^\circ$. Утверждение задачи доказано.

Задача 2. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается его сторон AC и BC соответственно в точках M и K и пересекает биссектрису BD в точках P и Q. Найти отношение площадей треугольников PQM и PQK, если $\angle BAC = 45^\circ$ и $\angle ABC = 60^\circ$ (рис. 14.26).

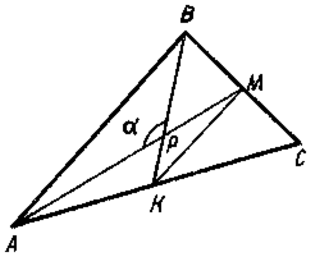


Рис. 14.25

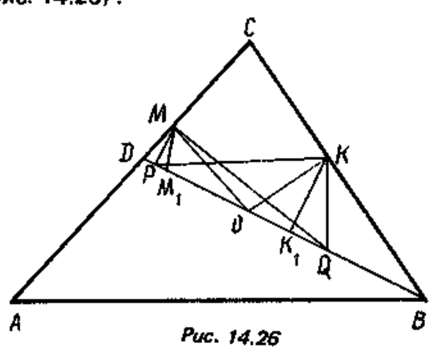


Рис. 14.26

Из условия задачи ясно следующее: $OP = OM = OK = OQ$, углы OMC, OKC, PMQ и PKQ – прямые.

Пусть MM_1 и KK_1 – высоты треугольников MPQ и KPQ. Треугольники PQM и PQK имеют общее основание PQ, поэтому

$$S(PQM) : S(PQK) = MM_1 : KK_1. \tag{14.17}$$

Обозначим $OM = OK = x$. Так как $\angle BOK = 60°$, а треугольник OKK_1 – прямоугольный, то $KK_1 = 0{,}5x\sqrt{3}$.

Очевидно, что $\angle ACB = 75°$. Из четырехугольника $KOMC$ следует, что $\angle MOK = 105°$. Поэтому $\angle MOM_1 = 15°$. Из треугольника MOM_1 находим $MM_1 = x\sin 15° = x\sin(60° - 45°) = 0{,}25x(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

Итак, $S(PQM) : S(PQK) = (\sqrt{3} - 1) : \sqrt{6}$.

14.6. Доказательство признаков равенства и подобия треугольников

Все три признака равенства треугольников обычно доказываются в начале изучения систематического курса планиметрии. Общеизвестно, с какими большими трудностями сталкиваются шестиклассники при доказательстве третьего признака равенства треугольников. Анализ ныне действующих программ и учебных пособий по геометрии показывает, что в начале шестого класса необходимо изучить только первый и второй признаки равенства треугольников, с помощью которых ведется доказательство всех последующих теорем. Доказательство третьего признака равенства треугольников и всех трех признаков подобия треугольников выполняется достаточно просто с применением теорем косинусов и синусов. Приведем эти доказательства.

Пусть даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, стороны и углы которых соответственно равны a, b, c, A, B, C и $a_1, b_1, c_1, A_1, B_1, C_1$. Очевидно, что

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{2bc}; \tag{14.18}$$

$$\cos A_1 = \frac{b_1^2 + c_1^2 - a_1^2}{2b_1c_1}. \tag{14.19}$$

1. Если $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$, то из равенств (14.18) и (14.19) получаем: $\cos A = \cos A_1$ и $A = A_1$ $(0° < A,\ A_1 < 180°)$. Третий признак равенства треугольников доказан.

2. Если $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = k > 0$, то из равенств (14.18) и (14.19) также получаем $\cos A = \cos A_1$, т.е. $A = A_1$. Аналогично показывается, что $B = B_1$ и $C = C_1$. Таким образом, третий признак подобия треугольников доказан без ссылки на третий признак равенства треугольников.

3. Если $A = A_1$, $B = B_1$ и $C = C_1$, то по теореме синусов получаем: $b : b_1 = a : a_1$ и $c : c_1 = a : a_1$, т.е. $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1$.

4. Если $A = A_1$ и $b : b_1 = c : c_1 = k > 0$, то из $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ и $a_1^2 = b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1\cos A_1$ следует $a^2 = k^2a_1^2$, т.е. $a : a_1 = k$.

15. ПОСТРОЕНИЯ НА ПРОЕКЦИОННОМ ЧЕРТЕЖЕ

15.1. Основные построения на проекционном чертеже

Основные свойства параллельных проекций. Если проектирование выполнено параллельно прямой l, не параллельной проектируемым прямым (отрезкам), то проекция прямой есть прямая, проекции параллельных прямых параллельны, отношение длин проекций параллельных отрезков равно отношению их длин.

Любой треугольник можно считать изображением треугольника любой формы. Всякий параллелограмм можно считать изображением любого параллелограмма. Изображением треугольной пирамиды можно считать всякий четырехугольник с его диагоналями.

Впредь наши рассуждения будут вестись в предположении, что за плоскость проекции принята плоскость, на которой изображается фигура, т.е. плоскость листа бумаги, классной доски и т.п.

Основные задачи. Решение всякой задачи на изображение пространственной фигуры сводится к выполнению нескольких основных построений на проекционном чертеже.

З а д а ч а 1. Построить изображение правильного шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 15.1).

Дополним этот шестиугольник до правильного треугольника MKP. За изображение треугольника MKP можно принять произвольный треугольник $M_1K_1P_1$ (рис. (15.2). Получаем $MF : FE : EP = 1 : 1 : 1$. Поэтому $M_1F_1 : F_1E_1 : E_1P_1 = 1:1:1$. Аналогично показывается, что $K_1C_1 : C_1D_1 : D_1P_1 = 1:1:1$ и $M_1A_1 : A_1B_1 : B_1K_1 = 1:1:1$.

З а д а ч а 2. Построить изображение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

За изображение треугольной пирамиды A_1ADB можно принять произвольный четырехугольник AA_1DB вместе с диагоналями AD и A_1B (рис. 15.3). Изображение остальных ребер строится на основе важнейших свойств параллельных проекций.

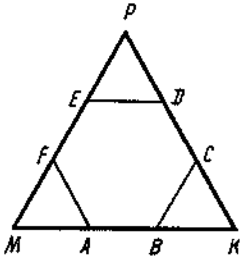


Рис. 15.1

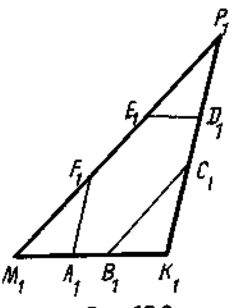


Рис. 15.2

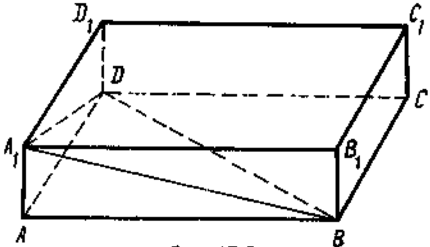


Рис. 15.3

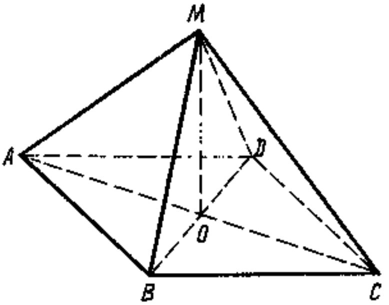


Рис. 15.4

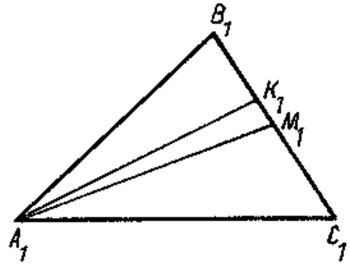


Рис. 15.5

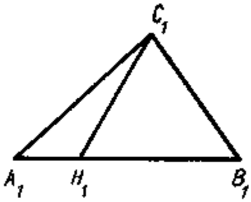


Рис. 15.6

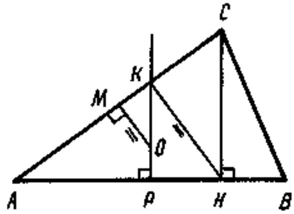


Рис. 15.7

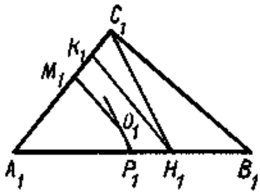


Рис. 15.8

Задача 3. Построить изображение правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$ с основанием $ABCD$.

Строим произвольный четырехугольник $AMCB$ с диагоналями AC и BM — изображение треугольной пирамиды $MABC$ (рис. 15.4). Строим параллелограмм $ABCD$ — изображение квадрата $ABCD$. Точка O есть пересечение прямых AC и BD. Отрезок MO является изображением высоты правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$.

Задача 4. Дан треугольник ABC, у которого $AB = 6$, $AC = 10$. Точка M — середина отрезка BC. Отрезок AK — биссектриса этого треугольника. Построить изображение треугольника ABC, его медианы AM и биссектрисы AK.

За изображение треугольника ABC принимаем произвольный треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 15.5). Очевидно, что $B_1M_1 : M_1C_1 = BM : MC = 1:1$. По свойству биссектрисы угла треугольника $B_1K_1 : K_1C_1 = BK : KC = BK : KC = AB : AC$. Итак, $B_1K_1 : K_1C_1 = 6 : 10 = 3 : 5$.

Задача 5. Дан треугольник ABC, у которого угол ACB прямой, $AC = 2$, $CB = 3$. Построить изображение его высоты CH, проведенной из вершины прямого угла C на гипотенузу AB.

За изображение прямоугольного треугольника ABC принимаем произвольный треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 15.6). В прямоугольном треугольнике ABC $AH : HB = AC^2 : CB^2$. Поэтому $A_1H_1 : H_1B_1 = AH : HB = 2^2 : 3^2 = 4 : 9$.

Задача 6. В треугольнике ABC сторона $BC = 13$, $AC = 20$, $AB = 21$. Построить изображения треугольника ABC, его высоты CH на сторону AB и центра O окружности, описанной вокруг этого треугольника (рис. 15.7).

Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ — изображение треугольника ABC. Так как $A_1H_1 : H_1B_1 = AH : HB$, задача сводится к нахождению отношения $AH : HB$.

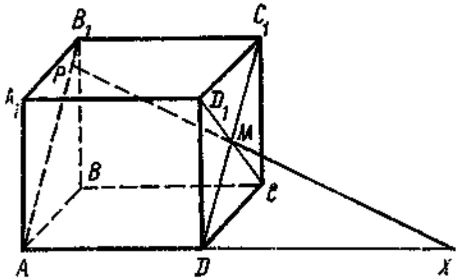


Рис. 15.9

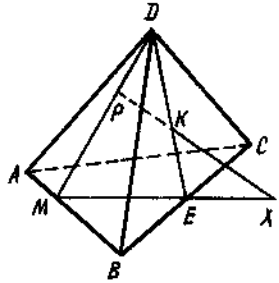


Рис. 15.10

По формуле Герона площадь треугольника ABC равна 126. Так как $0{,}5CH \times \times AB = 126$, то $CH = 12$. Из прямоугольного треугольника AHC получаем $AH = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$. Поэтому $A_1H_1 : H_1B_1 = 16 : 5$ (рис. 15.8).

Точка O — пересечение серединных перпендикуляров к отрезкам AC и AB (рис. 15.7). Если отрезок HK перпендикулярен к прямой AC, то

$$A_1K_1 : K_1C_1 = AK : KC = AH^2 : HC^2 = 16^2 : 12^2 = 16{:}9.$$

Серединные перпендикуляры к отрезкам AC и AB параллельны соответственно прямым KH и CH. Поэтому изображения этих серединных перпендикуляров параллельны соответственно прямым K_1H_1 и C_1H_1 (рис. 15.8).

З а д а ч а 7. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 15.9). Точка M есть пересечение прямых CD_1 и C_1D, $\overline{AP} = 0{,}75\overline{AB_1}$. Построить точку X, в которой прямая PM пересекает плоскость ABC.

Точка X принадлежит плоскости ABC и произвольной плоскости Σ, проходящей через прямую PM. Поэтому задача на построение точки X пересечения прямой l с плоскостью Σ решается в два этапа: строится прямая a пересечения плоскости Σ с какой-либо плоскостью, проходящей через прямую l; строится точка X, в которой пересекаются прямые l и a.

Если прямая l задается какими-либо двумя точками P и M, принадлежащими изображенной фигуре, целесообразно сначала построить такое сечение этой фигуры плоскостью, проходящей через точки P и M, одна из сторон которого принадлежала бы прямой a.

В нашем случае уже изображено сечение куба (прямоугольник AB_1C_1D), проходящее через прямую PM, сторона AD которого принадлежит плоскости ABC. Поэтому искомая точка X пересечения прямой PM и плоскости ABC есть пересечение прямых PM и AD.

З а д а ч а 8. Дано изображение треугольной пирамиды $DABC$ (рис. 15.10). Точки P и K принадлежат соответственно ее граням ABD и BCD. Прямая PK не параллельна плоскости ABC. Построить точку X, в которой прямая PK пересекает плоскость ABC.

Из всех сечений пирамиды плоскостью, проходящей через прямую PK и пересекающей плоскость ABC, наиболее простым по построению является сечение, определяемое точками P, K и M, так как прямые DP и AB пересекаются

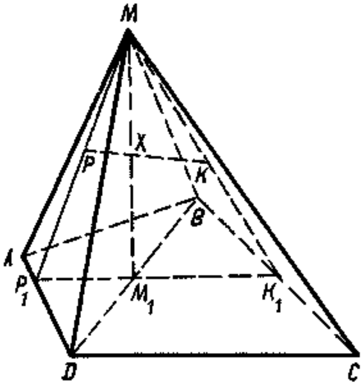


Рис. 15.11

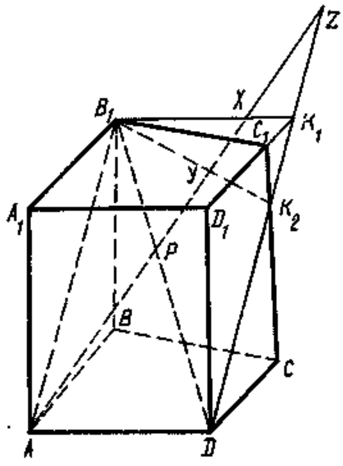


Рис. 15.12

в точке M, прямые DK и BC — в точке E и прямая ME принадлежит плоскости ABC. Искомая точка X есть пересечение прямых ME и PK.

З а д а ч а 9. Дано изображение четырехугольной пирамиды $MABCD$ (рис. 15.11). Точки P и K принадлежат соответственно граням ADM и BCM. Построить точку X, в которой пересекаются плоскость MBD и прямая PK.

Строим треугольник MP_1K_1 — сечение данной пирамиды плоскостью MKP. Прямые BD и P_1K_1 пересекаются в точке M_1. Так как по прямой MM_1 пересекаются плоскости MBD и MP_1K_1 и прямая PK принадлежит плоскости MP_1K_1, то точка X есть пересечение прямых MM_1 и PK.

З а д а ч а 10. Дано изображение четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 15.12). Точка P принадлежит ее диагонали B_1D. Построить точки X, Y и Z, в которых прямая AP пересекает соответственно плоскости $A_1B_1C_1$, B_1BC и D_1DC.

Так как точка X принадлежит плоскости $A_1B_1C_1$, целесообразно построить фигуру Φ', по которой плоскость APB_1 пересекает данную четырехугольную призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскости $A_1B_1C_1$ и ABC параллельны, поэтому фигура Φ' лежит в плоскости, которая пересекает плоскость $A_1B_1C_1$ по прямой B_1K_1, параллельной прямой AD. Прямые B_1K_1 и C_1D_1 пересекаются в точке K_1. Точка K_2 есть пересечение прямых C_1C и DK_1. Таким образом, фигура Φ' является четырехугольником AB_1K_1D. Искомые точки X, Y и Z есть соответственно точки пересечения прямой AP с прямыми B_1K_1, B_1K_2 и DK_2.

15.2. Построение ортогональных прямых и плоскостей

К основным метрическим задачам относятся: построение прямой h, проходящей через данную точку A и перпендикулярной к данной прямой m; построение общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым; по-

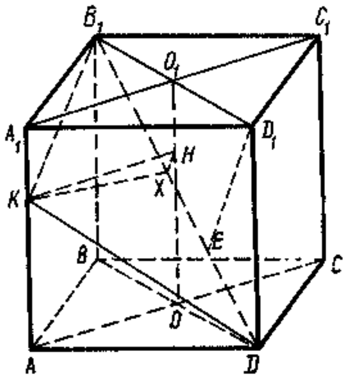


Рис. 15.13

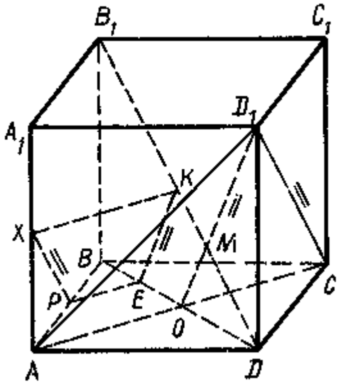


Рис. 15.14

строение прямой, проходящей через данную точку A и перпендикулярной к данной плоскости; построение плоскости, перпендикулярной к данной прямой; построение плоскости, образующей с данной плоскостью данный двугранный угол; построение прямой, пересекающей данную плоскость под данным углом.

Методику решения названных задач поясним примерами.

З а д а ч а 1. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 15.13), $\overline{AK} = 2\overline{KA_1}$, $AB = 6$. Построить изображение перпендикуляра KX, проведенного из точки K к прямой B_1D. Найти длину отрезка KX.

Отмечаем на прямой B_1D такие точки, расстояние между которыми и расстояние от точки K до них можно найти. Тогда задача сведется к изображению высоты треугольника, у которого известны три стороны. В качестве такого треугольника целесообразно взять треугольник KB_1D, так как $B_1D = 6\sqrt{3}$, $KB_1 = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$, $KD = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$. Теперь задача свелась к нахождению отношения $B_1X : XD$ (см. задачу 6, § 15.1).

Решение этой задачи можно упростить. Проводим через прямую B_1D такую плоскость Σ, на которую просто провести из точки K перпендикуляр KH. Строим отрезок HX, перпендикулярный к прямой B_1D. Тогда отрезок KX перпендикулярен к прямой B_1D (теорема о трех перпендикулярах). В качестве плоскости Σ целесообразно принять плоскость BDD_1.

Очевидно, что прямая AC перпендикулярна к плоскости BDD_1. Через точку K проводим прямую, параллельную прямой AC. В пересечении с прямой OO_1 получаем точку H. Прямая KH перпендикулярна к плоскости BDD_1. Строим отрезок D_1F, перпендикулярный к прямой B_1D. Получаем $B_1F : FD = B_1D_1^2 : D_1D^2 = 2:1$. Проводим отрезок HX, параллельный прямой D_1F.

З а д а ч а 2. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 15.14), $\overline{DK} = \overline{KB_1}$, точка X принадлежит отрезку AA_1. Построить изображение точки X, если отрезок XK перпендикулярен к прямой B_1D.

Построим произвольное сечение куба, перпендикулярное к прямой B_1D.

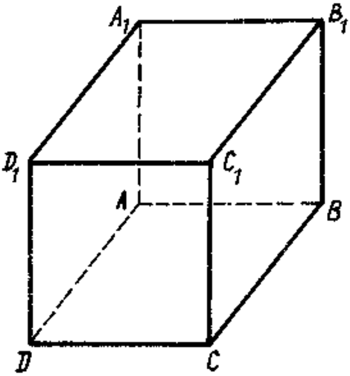


Рис. 15.15

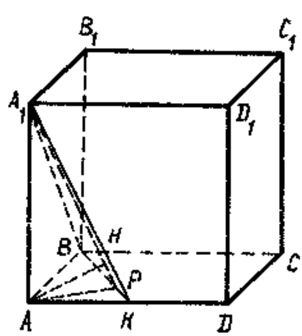


Рис. 15.16

Известно, что плоскость D_1AC перпендикулярна к прямой B_1D. Пусть O есть точка пересечения прямых BD и AC. Тогда M — точка пересечения прямых OD_1 и B_1D, прямой B_1D и плоскости AD_1C.

Проведем сечение куба плоскостью Σ, параллельной плоскости AD_1C. Очевидно, что плоскость Σ перпендикулярна к прямой B_1D и точка X есть пересечение прямой AA_1 и плоскости Σ.

Так как параллельные плоскости пересекаются третьей по параллельным прямым, построение точки X сводится к следующему.

Через точку K проводим прямую l, параллельную прямой OD_1. Она пересекает прямую BD в точке E. Через точку E проводим прямую m, параллельную прямой AC. Прямая m пересекает прямую AB в точке P. Через P проводим прямую n, параллельную прямой D_1C. Искомая точка X есть пересечение прямых n и AA_1.

З а д а ч а 3. На рис. 15.15 дана параллельная проекция куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Его грань AA_1B_1B параллельна плоскости чертежа. Найти угол φ наклона направления проектирования к плоскости проекции (чертежа).

Так как грань AA_1B_1B параллельна плоскости чертежа, то длина отрезка AB, изображенного на рисунке 15.15, равна длине ребра куба. Измерением находим, что ребро AD изображено отрезком, равным отрезку AB. Ребро AD перпендикулярно к плоскости ABA_1, и проекция ребра AD равна этому ребру. Поэтому $\varphi = 45°$.

З а д а ч а 4. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 15.16), $AB = 4$, $\overline{AK} = \overline{KD}$. Построить изображение перпендикуляра AH, проведенного из точки A к плоскости A_1BK, и найти его длину.

Общий план решения таких задач следующий. Через точку A проводится некоторая плоскость Σ, перпендикулярная к плоскости A_1BK. Строится прямая l, по которой пересекаются плоскости Σ и A_1BK. Проводится прямая AH, перпендикулярная к прямой l.

Ребро AA_1 перпендикулярно к плоскости ABD, и прямая BK принадлежит

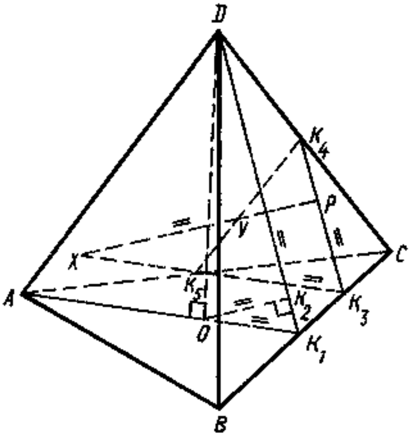


Рис. 15.17

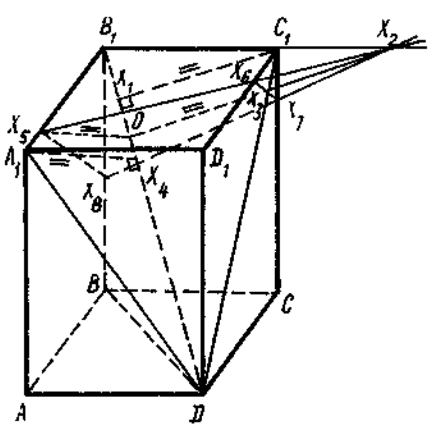


Рис. 15.18

этой плоскости. Поэтому в качестве плоскости Σ целесообразно взять плоскость, проходящую через прямую AA_1. Строим отрезок AP, перпендикулярный к прямой BK. Тогда прямая A_1P перпендикулярна к прямой BK и плоскость AA_1P перпендикулярна к плоскости BKA_1. Проводим перпендикуляр AH к прямой A_1P. Тогда отрезок AH будет перпендикулярным к плоскости A_1BK.

Как построить точки P и H? Отрезок AP – высота прямоугольного треугольника BAK, поэтому

$$KP : PB = AK^2 : AB^2 = 2^2 : 4^2 = 1:4.$$

Из прямоугольного треугольника PAA_1 следует: $PH : HA_1 = AP^2 : AA_1^2$. Теперь ясно, что для решения задачи нужно знать длину отрезка AP.

Из прямоугольного треугольника KAB получаем:

$$AP \cdot BK = AK \cdot AB; \; AP = AK \cdot AB : BK =$$

$$= (2 \cdot 4) : \sqrt{2^2 + 4^2} = 4 : \sqrt{5}.$$

Итак, $PH : HA_1 = (4/\sqrt{5})^2 : 4^2 = 1:5.$

Из прямоугольного треугольника PAA_1 имеем: $AH \cdot A_1P = AP \cdot AA_1$. Отсюда

$$AH = AP \cdot AA_1 : A_1P = AP \cdot AA_1 : \sqrt{AA_1^2 + AP^2} = 2\sqrt{6} : 3.$$

Задача 5. Дано изображение правильной треугольной пирамиды $DABC$ (рис. 15.17). Треугольник ABC – ее основание. Точка P принадлежит грани BCD. Через точку P проходит прямая l, перпендикулярная к плоскости BCD. Построить точки X и Y, в которых прямая l пересекается соответственно с плоскостями ABC и ACD, если $AD = AB$.

План решения задачи показан на рис. 15.17. Поясним это решение. Два перпендикуляра к одной и той же плоскости параллельны. Параллельные прямые (не параллельные направлению проектирования) на проекционном чер-

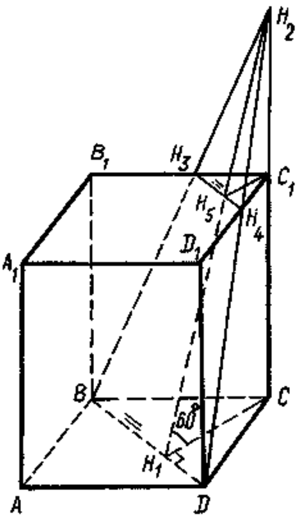


Рис. 15.19

теже изображаются параллельными прямыми. Поэтому целесообразно сначала провести произвольный перпендикуляр к плоскости DBC. А для этого нужно построить какую-либо плоскость Σ, перпендикулярную к плоскости DBC, и в плоскости Σ провести прямую, перпендикулярную к линии пересечения плоскостей Σ и DBC.

В качестве плоскости Σ выбрана плоскость ADK_1, так как на проекционном чертеже легко построить точку K_1 – середину отрезка BC. Далее, $\overline{AO} = 2\overline{OK}_1$, и отрезок DO перпендикулярен к плоскости ABC. Угол DOK_1 прямой.

Мы уже умеем изображать высоту OK_2 прямоугольного треугольника K_1OD:

$$K_1K_2 : K_2D = OK_1^2 : OD^2 = \left(\frac{1}{3}AK_1\right)^2 : \left(AD^2 - \left(\frac{2}{3}AK_1\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{9}AB^2\sin^2 60^\circ : \left(AB^2 - \frac{4}{9}AB^2\sin^2 60^\circ\right) = 1:8.$$

З а д а ч а 6. Дано изображение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 15.18), $AD = 2$, $CC_1 = 4$, $CD = 3$, $\overline{DO} = 3\overline{OB}_1$. Плоскость Σ проходит через точку O, и Σ перпендикулярна к прямой B_1D. Построить сечение данного параллелепипеда плоскостью Σ.

План решения задачи показан на рис. 15.18.

З а д а ч а 7. Дано изображение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 15.19), $BC = 4$, $CD = 3$, $CC_1 = \sqrt{3}$. Плоскость Σ проходит через прямую BD и образует с плоскостью BDC двугранный угол 60°. Построить сечение данного параллелепипеда плоскостью Σ.

План построения показан на рис. 15.19.

15.3. Методы построения сечений многогранников плоскостью

Метод следов построения сечений пирамид и призм. Строится прямая (след) пересечения секущей плоскости с плоскостью основания пирамиды или призмы. Находятся точки встречи следа с плоскостями боковых граней и диагональных сечений этих многогранников. Эти точки вместе с данными точками секущей плоскости определяют прямые, которым принадлежат стороны (диагонали) искомого сечения.

З а д а ч а 1. Дано изображение четырехугольной пирамиды $MABCD$ с основанием $ABCD$ (рис. 15.20). Точки P, E и K принадлежат соответственно ребрам пирамиды AM, MD и MB. Построить сечение данной пирамиды плоскостью PKE.

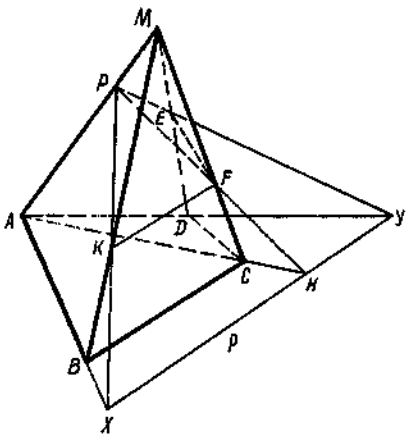


Рис. 15.20

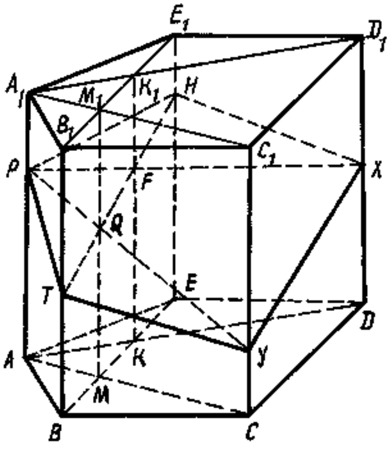


Рис. 15.21

Для построения следа p, по которому пересекаются плоскости PKE и ABC, необходимо найти две точки, принадлежащие этим плоскостям. Строится точка Y, в которой пересекаются прямые PE и AD, и точка X пересечения прямых PK и AB. Прямая XY и есть след p, так как прямая XY принадлежит плоскостям ABC и PKE.

Для построения точки F, в которой пересекаются прямая CM и плоскость PKE, найдем точку H пересечения прямой p и плоскости ACM. Очевидно, что в точке H пересекаются прямые p и AC. В точке F пересекаются прямые PH и MC. Искомым сечением является четырехугольник $PEFK$.

Метод деления n-угольной пирамиды (призмы) на треугольные пирамиды (призмы). Из данной n-угольной призмы (пирамиды) выделяется та треугольная призма (пирамида) П, на боковых ребрах которой лежат точки, определяющие искомое сечение. Строится сечение этой призмы (пирамиды), а затем — сечения тех треугольных призм (пирамид), которые имеют общие части с фигурой П.

З а д а ч а 2. Дано изображение пятиугольной призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 15.21). Точки P, H и T принадлежат соответственно ее ребрам AA_1, EE_1, BB_1. Построить сечение данной призмы плоскостью PHT.

Треугольник PHT — сечение призмы $ABEA_1B_1E_1$ плоскостью PHT. С этой призмой призмы $ABCA_1B_1C_1$, $ADEA_1D_1E_1$ имеют общие части. Точки M, K, M_1, K_1 являются соответственно точками пересечения прямых AC и BE, AD и BE, A_1C_1 и B_1E_1, A_1D_1 и B_1E_1. Плоские четырехугольники ACC_1A_1 и BEE_1B_1 пересекаются по отрезку MM_1. Поэтому существует точка Q, в которой пересекаются прямые TH и MM_1. Треугольник PTY есть сечение плоскостью PHT призмы $ABCA_1B_1C_1$ (точка Y — это пересечение прямых PQ и CC_1).

На основании аналогичных рассуждений получаем, что прямые TH и KK_1 пересекаются в точке F, а прямые PF и DD_1 — в точке X. Очевидно, что

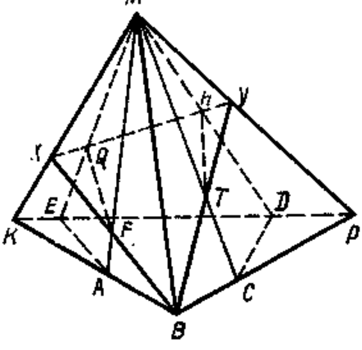


Рис. 15.22

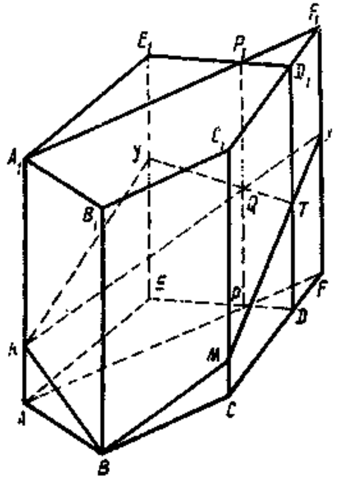


Рис. 15.23

треугольник PHX есть сечение призмы $ADEA_1D_1E_1$ плоскостью PTH. Пятиугольник $PTYXH$ — искомое сечение.

Метод дополнения *n*-угольной призмы (пирамиды) до треугольной призмы (пирамиды). Данная призма (пирамида) достраивается до треугольной призмы (пирамиды). Строится ее сечение. Искомое сечение получается как часть сечения треугольной призмы (пирамиды).

Задача 3. Дано изображение пятиугольной пирамиды $MABCDE$ с основанием $ABCDE$ (рис. 15.22). Точки F и T принадлежат соответственно ее ребрам AM и MC. Построить сечение этой пирамиды плоскостью FBT.

Строим точки P и K, в которых пересекаются соответственно прямые BC и DE, AB и DE. Очевидно, что данная пятиугольная пирамида $MABCD$ есть часть треугольной пирамиды $MKBP$. Строим сечение пирамиды $MKBP$ плоскостью FBT. Точки X и Y есть точки пересечения соответственно прямых FB и KM, BT и MP. Треугольник XYB есть сечение пирамиды $MKBP$ плоскостью FBT. Строим точки Q и H, в которых пересекаются соответственно прямые EM и XY, MD и XY. Пятиугольник $QHTBF$ — искомое сечение.

Метод параллельных прямых. В основу этого метода положено следующее свойство параллельных плоскостей: прямые, по которым плоскость пересекает параллельные плоскости, параллельны между собой.

Задача 4. Дано изображение пятиугольной призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 15.23). Точки K и M принадлежат соответственно отрезкам AA_1 и CC_1. Построить сечение данной призмы плоскостью KBM.

Через прямую AA_1 проводим плоскость Σ, параллельную плоскости BCC_1. Прямые ED, E_1D_1, CD и C_1D_1 пересекаются с плоскостью Σ соответственно в точках P, P_1, F и F_1. Так как плоскости Σ и BCC_1 параллельны, то плоскость KBM пересекает плоскость Σ по прямой KX, параллельной прямой BM. Точка X принадлежит прямой FF_1.

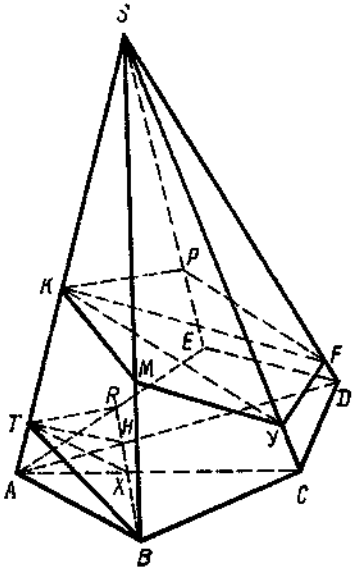


Рис. 15.24

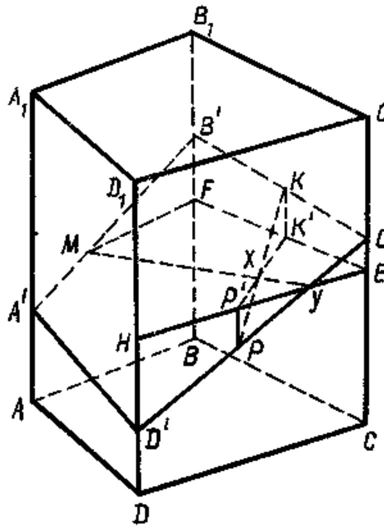


Рис. 15.25

Прямые PP_1 и KX, MX и DD_1, EE_1 и TO пересекаются соответственно в точках O, T и Y. Пятиугольник $KBMTY$ — искомое сечение.

Метод параллельного переноса секущей плоскости. Сущность этого метода заключается в следующем. Вместо секущей плоскости строится параллельная ей плоскость Π, которая пересекает все три грани некоторого трехгранного угла данного многогранника (или его части). Путем параллельного переноса строятся некоторые линейные элементы искомого сечения, соответствующие легко строящимся элементам плоскости Π.

З а д а ч а 5. Дано изображение пятиугольной пирамиды $SABCDE$ с основанием $ABCDE$ (рис. 15.24). На ее боковых ребрах SA, SB, SE отмечены соответственно точки K, M, P. Построить сечение этой пирамиды плоскостью KMP.

Проводим прямую BT, параллельную прямой KM, и прямую TS, параллельную прямой KP. Получаем треугольник TRB, плоскость которого параллельна плоскости KMP.

Строим диагонали AD и AC основания пирамиды. Прямые BR и AD, BR и AC пересекаются соответственно в точках H и X. Строим отрезки TH и TX. Через точку K проводим прямые, параллельные соответственно прямым TH и TX. В пересечении с ребрами SD и SC получаем точки F и Y, принадлежащие секущей плоскости. Пятиугольник $KPFYM$ — искомое сечение.

Метод разделяющей плоскости. Пусть сечение задано точками M, K и P. Строим сечение пирамиды (призмы) плоскостью, параллельной основанию пирамиды (призмы) и проходящей через точку K, если точки M и P лежат в различных полупространствах относительно этой плоскости.

З а д а ч а 6. Дано изображение четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 15.25). Точки M, K и P принадлежат соответственно граням ABB_1A_1,

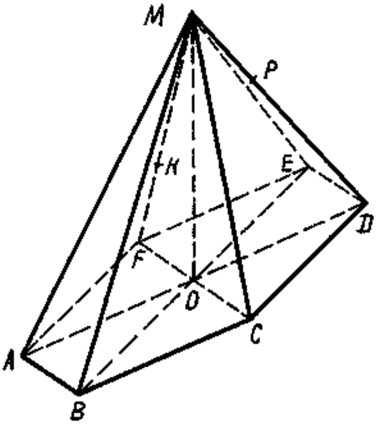


Рис. 15.26

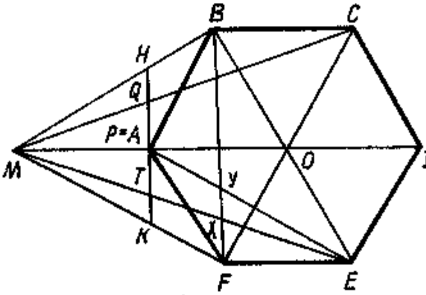


Рис. 15.27

BCC_1B_1 и CDD_1C_1 этой призмы. Построить ее сечение плоскостью MKP.

Проводим отрезки MF, FE и EH, параллельные соответственно AB, BC и CD (рис. 15.25). Точки K и P лежат в различных полупространствах относительно плоскости MFE, которая параллельна основаниям призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Строим отрезок KK', параллельный ребру BB_1, и отрезок PP', параллельный ребру CC_1 (рис. 15.25).

Точки X и Y есть точки пересечения соответственно прямых KP и $K'P'$, MX и EH. Прямая PY пересекает прямую CC_1 в точке C', а прямую DD_1 в точке D'. Прямые $C'K$ и $B'M$ пересекают прямые BB_1 и AA_1 соответственно в точках B' и A'. Четырехугольник $A'B'C'D'$ — искомое сечение.

Метод параллельных проекций. Пусть дано изображение некоторого многогранника. Точки K, M и P определяют секущую плоскость. Строим новое изображение данного многогранника так, чтобы искомое сечение изображалось на нем некоторой прямой.

З а д а ч а 7. Дано изображение шестиугольной пирамиды $MABCDEF$, основанием которой является правильный шестиугольник $ABCDEF$. Точка P принадлежит ребру MD и $MP : PD = 1:2$. Точка K принадлежит ребру FM и $FK : KM = 1:2$ (рис. 15.26). Секущая плоскость проходит через точки A, K и P. Найти, в каком отношении плоскость AKP делит ребра ME, MC и MB данной пирамиды.

За направление проектирования принимаем прямую AP, а за плоскость проекции — плоскость основания пирамиды. При таком условии изображение данной пирамиды показано на рис. 15.27.

Очевидно, что $MA = AO = OD$ и четырехугольник $MFEA$ является параллелограммом.

В трапеции $BEFA$ диагонали точкой их пересечения делятся в отношении 1:2, т.е. $AY : YE = 1:2$ и $KF = AY$. Отсюда следует, что прямая KA, изображающая на рис. 15.27 секущую плоскость KAP, параллельна прямой BF. Теперь ясно, что $MT : TX = 2:1$ и $MT : TE = 2:3$.

Итак, $MH : HB = MK : KF = 2:1$ и $MT : TE = MQ : QC = 2:3$.

16. МЕТОД ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

16.1. Сущность метода

Сущность метода параллельных проекций заключается в целесообразном выборе направления проектирования. При решении многих геометрических задач удобно выбрать направление проектирования так, чтобы некоторые прямые изображались точками, некоторые плоскости — прямыми, а произвольные треугольники — правильными треугольниками.

Метод параллельных проекций основывается только на тех свойствах параллельных проекций, которые изучаются в школе. В частности, широко используется возможность изображать любой треугольник любым треугольником и любую треугольную пирамиду — всяким полным четырехугольником. Это позволяет свести исследование многих отношений между элементами произвольных геометрических объектов к доказательству соответствующих свойств достаточно "хороших" плоских или трехмерных фигур. Например, установление многих свойств треугольной пирамиды существенно упрощается, если считать ее изображением квадрат (вместе с его диагоналями).

16.2. Отношение отрезков

При вычислении отношений отрезков в качестве проектирующей прямой выбирается та, которая параллельна одному из данных отрезков.

З а д а ч а 1. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M — середина отрезка AB. Точка K принадлежит отрезку AD, и $AK : KD = 1:2$. Найти, в каком отношении точка P пересечения отрезков AC и MK делит отрезок MK.

Считаем данный параллелограмм изображением квадрата $ABCD$ со стороной, равной 6 (рис. 16.1). Отрезок AP — биссектриса прямого угла треугольника KAM. Поэтому $KP : PM = AK : AM = \frac{1}{2}\ AB : \frac{1}{3}\ AD = 3:2$.

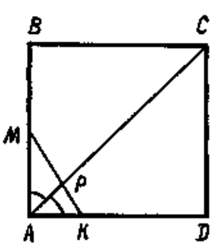


Рис. 16.1

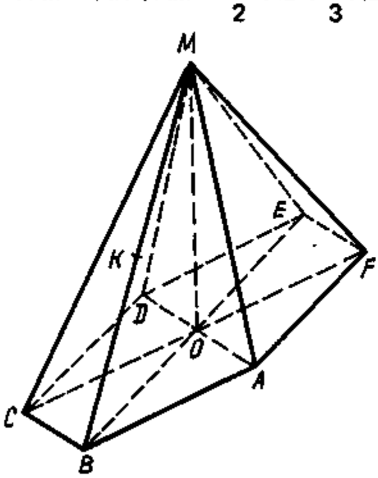


Рис. 16.2

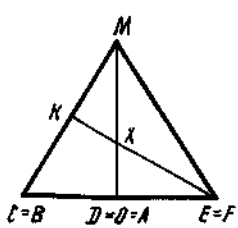


Рис. 16.3

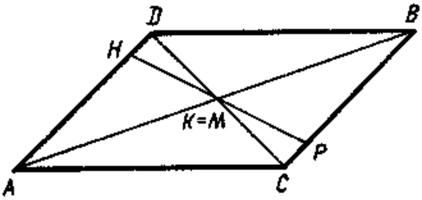


Рис. 16.4

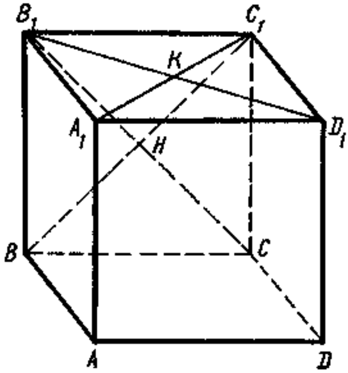


Рис. 16.5

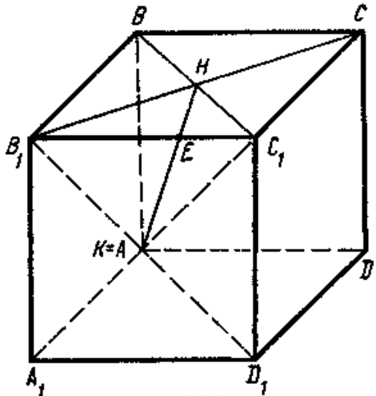


Рис. 16.6

З а д а ч а 2. Дана правильная шестиугольная пирамида $MABCDEF$ (рис. 16.2). Точка K делит ребро BM пополам. Найти, в каком отношении плоскость FEK делит ребро AM (точкой X).

Строим ортогональную проекцию данной пирамиды, приняв прямую FE в качестве проектирующей (рис. 16.3). Плоскость FEK изображается прямой KE. Так как на рис. 16.3 отрезки KE и MA являются медианами треугольника MBE, то $MX : XA = 2 : 1$.

З а д а ч а 3. Дана треугольная пирамида $DABC$. Точки M и K – середины ребер AB и CD. Точка P принадлежит ребру BC. Плоскость MPK пересекает ребро AD в точке H. Доказать, что отрезок PH пересекается прямой MK пополам.

Построим изображение пирамиды $DABC$, приняв за направление проектирования прямую KM (рис. 16.4). Данная пирамида изобразилась параллелограммом $ACBD$, а ее сечение плоскостью MKP – отрезком PH, проходящим через точку $K = M$, т.е. центр симметрии параллелограмма. Утверждение задачи доказано.

З а д а ч а 4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 16.5). В каком отношении делит ребро B_1C_1 точка E, которая принадлежит плоскости, проходящей через вершину A и центры K и H граней $A_1B_1C_1D_1$ и B_1C_1CB?

Изображаем нижнее основание данного куба квадратом $ABCD$, а прямую AK – точкой $A = K$ (рис. 16.6). На этом рисунке плоскость AKH изображается прямой AH. Прямые B_1C_1 и HA пересекаются в точке E. Для треугольника B_1CA отрезки AH и B_1C_1 являются медианами, поэтому $B_1E : EC_1 = 2:1$.

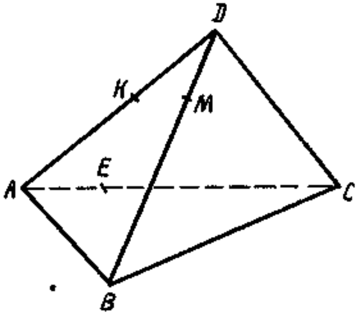


Рис. 16.7

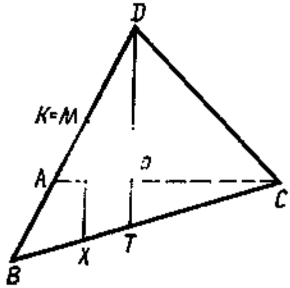


Рис. 16.8

З а д а ч а 5. Дана треугольная пирамида $DABC$ (рис. 16.7), $\overline{DK} = \frac{1}{2}\overline{DA}$, $\overline{DM} = \frac{1}{3}\overline{DB}$, $\overline{AE} = \frac{1}{4}\overline{AC}$. В каком отношении плоскость KHE делит отрезок BC?

Пусть плоскость KHE пересекает прямую BC в точке X. Изображаем грань ADC правильным треугольником (рис. 16.8), а отрезок KM – точкой $K = M$. Построим на рис. 16.8 прямую DP ($\overline{AP} = \overline{PC}$). Так как прямые KX и DT параллельны, то $BX : XT = BK : KD = 2:1$ и $EP : PC = XT : TC = 1:2$. Отсюда $BX : XC = 2:3$.

16.3. Пересечение прямых

При решении задач на доказательство того, что данные три прямые пересекаются в одной точке, произвольные треугольники изображаются, как правило, правильными треугольниками.

З а д а ч а 1. Доказать, что во всяком треугольнике его медианы пересекаются в одной точке.

Всякий треугольник можно считать изображением правильного треугольника. Утверждение задачи для правильного треугольника верно, потому что в этом треугольнике медианы являются его биссектрисами. Отсюда следует утверждение задачи.

З а д а ч а 2. Через середины противоположных ребер произвольной пирамиды $DABC$ проведены прямые (рис. 16.9). Доказать, что они пересекаются в одной точке.

За направление проектирования принимаем прямую FH (рис. 16.10). Тогда пирамида изображается параллелограммом (вместе с его диагоналями). Середины противоположных сторон параллелограмма симметричны относительно точки $F = H$. Задача решена.

З а д а ч а 3. Дан произвольный треугольник ABC, $\overline{BM} = \frac{1}{3}\overline{BA}$, $\overline{AK} = \frac{1}{3}\overline{AC}$, $\overline{CP} = \frac{1}{3}\overline{CB}$. Доказать, что центры тяжестей треугольников ABC и MKP совпадают.

Треугольник ABC принимаем за изображение правильного треугольника. Тогда треугольник MKP будет изображением правильного треугольника

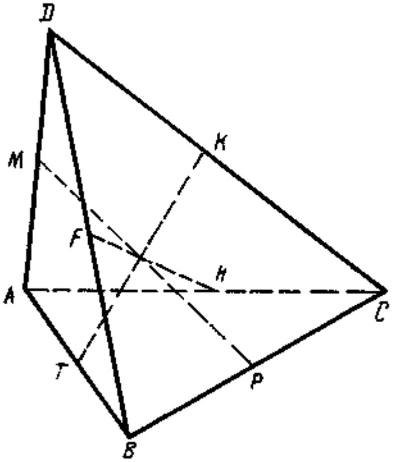


Рис. 16.9

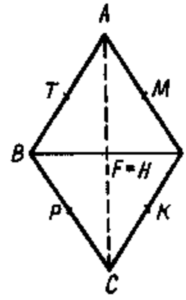


Рис. 16.10

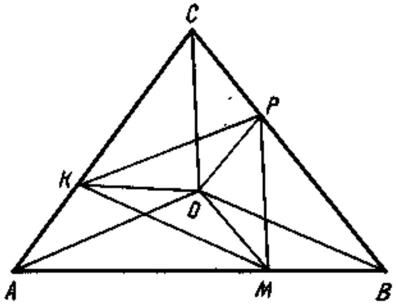


Рис. 16.11

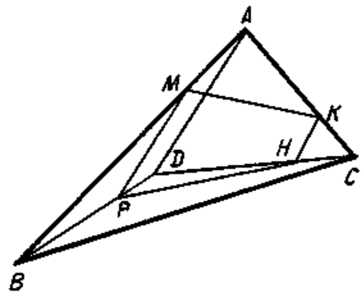


Рис. 16.12

(рис. 16.11). Центры вращений этих треугольников совпадают. А так как у правильного треугольника центр вращения и центр тяжести совпадают, то утверждение задачи доказано.

З а д а ч а 4. На рис. 16.12 отрезки *MP*, *AD* и *KH* параллельны и четырехугольник *PMKH* является трапецией. Доказать, что прямые *MK*, *PH* и *BC* пересекаются в одной точке *E*.

Считаем рис. 16.12 изображением пирамиды *DABC* и ее сечения *PMKH* плоскостью *MPH*. Поэтому точка *E*, в которой пересекаются прямые *MK* и *PH*, принадлежит прямой *BC*.

З а д а ч а 5. В четырехугольник *ABCD* вписана трапеция *MKPE* (рис. 16.13), параллельные стороны которой параллельны диагонали *AC*. Доказать, что прямые *ME*, *BD* и *KP* пересекаются в одной точке.

Принимаем четырехугольник *ABCD* (вместе с его диагоналями) за изображение треугольной пирамиды. Трапеция *MKPE* является сечением этой пирамиды плоскостью *MKP*. Эта плоскость не параллельна прямой *BD*, так как боковые стороны *ME* и *KP* трапеции *MKPE* не параллельны прямой *BD*. Прямая *BD* пересекает плоскость *MKP* в точке *H*, которая принадлежит плоскостям *ABD* и *BDC*. Поэтому в точке *H* пересекаются прямые *ME*, *KP* и *BD*.

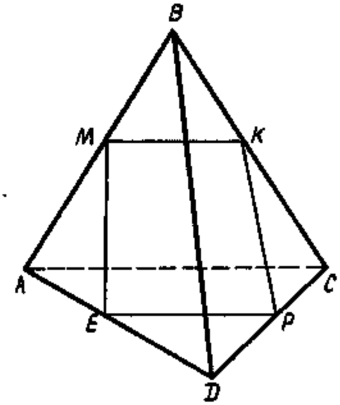


Рис. 16.13

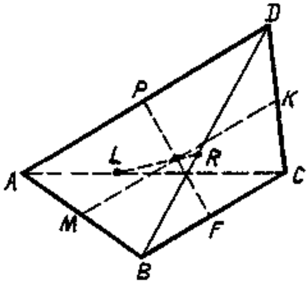


Рис. 16.14

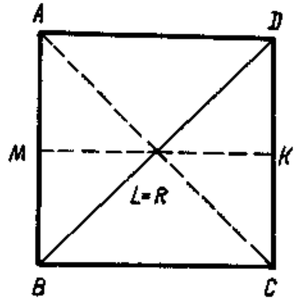


Рис. 16.15

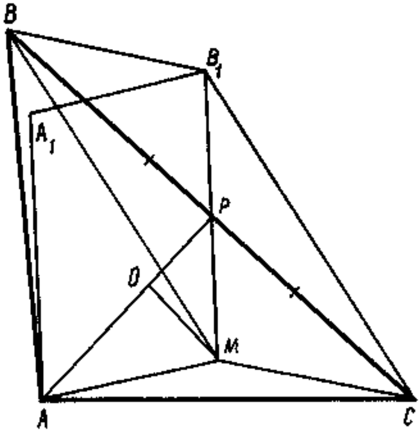


Рис. 16.16

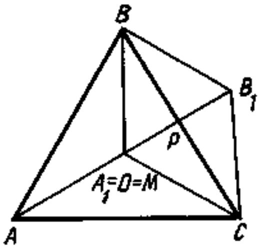


Рис. 16.17

З а д а ч а 6. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, и отрезок, соединяющий середины диагоналей, пересекаются в одной точке (рис. 16.14).

Рис. 16.14 считаем изображением правильного тетраэдра $DABC$. А этот тетраэдр в свою очередь можно изобразить квадратом, выбрав за направление проектирования прямую LR (рис. 16.15). После этого утверждение задачи становится очевидным.

З а д а ч а 7. Даны треугольник ABC и произвольная точка M внутри него (рис. 16.16). Доказать, что если построить параллелограммы MBB_1C и MAA_1B_1, то диагональ MA_1 последнего проходит через центр тяжести O данного треугольника.

Данный треугольник ABC вместе с отрезками BM, CM, MA и MO считаем изображением правильной треугольной пирамиды (с основанием ABC и высотой MO).

Построим другое изображение этой пирамиды (и связанных с ней параллелограммов MBB_1C и AMB_1A_1), расположив ее основание параллельно плоскости проекции и приняв за направление проектирования прямую MO (рис. 16.17). Утверждение задачи очевидно.

16.4. Коллинеарные точки

При решении задач на доказательство того, что три данные точки A, B, C принадлежат одной прямой, за направление проектирования можно принять одну из прямых AB, BC или AC.

Задача 1. Дана произвольная трапеция $ABCD$ (рис. 16.18). В точке K пересекаются прямые AD и BC. Диагонали AC и BD трапеции пересекаются в точке M. Доказать, что прямая KM проходит через середины H и P сторон AB и CD трапеции.

Треугольник AKB принимаем за изображение правильного треугольника $A_1K_1B_1$, а трапецию $ABCD$ — за изображение равнобедренной трапеции $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 16.19). Прямая M_1K_1 является осью симметрии треугольника $A_1K_1B_1$ и трапеции $A_1B_1C_1D_1$. Поэтому прямая M_1K_1 делит пополам отрезки D_1C_1 и A_1B_1. Точки P и H являются образами точек P_1 и H_1 соответственно. Поэтому прямая KM проходит через середины сторон CD и AB данной трапеции.

Задача 2. На сторонах AB и CD четырехугольника $ABCD$ даны точки M и K, такие, что $\overline{AM} = k\overline{AB}$, $\overline{DK} = k\overline{DC}$. Доказать, что середины отрезков BC, MK, AD принадлежат одной прямой.

Рис. 16.20 считаем изображением правильного тетраэдра $ABCD$. Пусть точки P и T — середины ребер AD и BC. Прямая PT является осью симметрии этого тетраэдра. Поэтому точки M и K симметричны относительно прямой PT, и точка E, в которой пересекаются прямые PT и MK, есть середина отрезка MK.

Задача 3. На рис. 16.21 показаны параллельные прямые a, b, c, принадлежащие одной плоскости, и точки M, K, P этой плоскости. Построить на прямых a, b, c соответственно точки A, B, C так, чтобы точка M принадлежала отрезку AB, K — отрезку BC и P — отрезку AC.

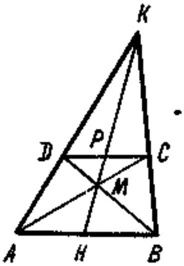


Рис. 16.18

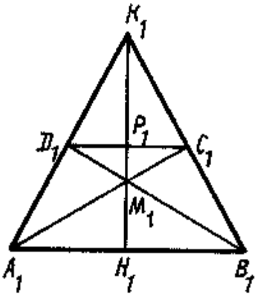


Рис. 16.19

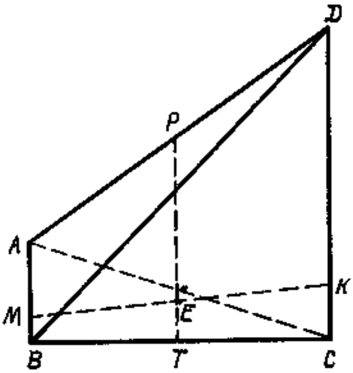


Рис. 16.20

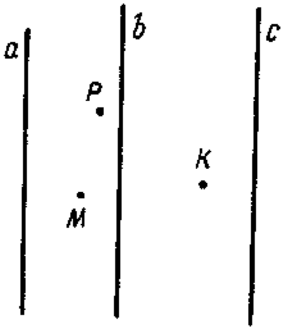


Рис. 16.21

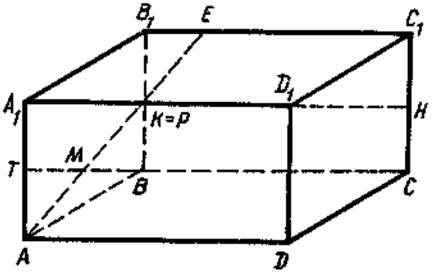


Рис. 16.23

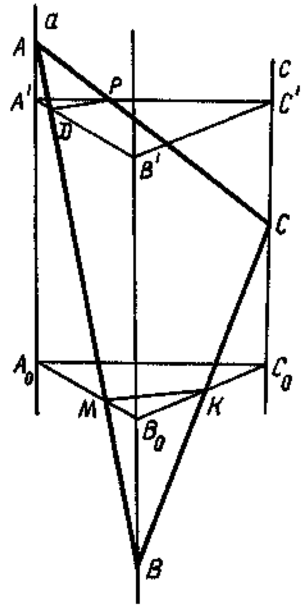


Рис. 16.22

Возьмем на прямой b произвольную точку B_0 и построим прямые B_0M и B_0K, которые пересекают прямые a и c соответственно в точках A_0 и C_0 (рис. 16.22). Через точку P проводим прямую $A'C'$, параллельную прямой A_0C_0, и прямую $A'B'$, параллельную прямой A_0B_0. Получили изображение треугольной призмы $A_0B_0C_0A'B'C'$. Задача свелась к построению сечения призмы плоскостью MKP.

Проводим прямую DP, параллельную прямой MK. Прямая a пересекается с прямой DM в точке A. Получаем точки B и C, в которых пересекаются соответственно прямые b и DM, c и BK.

З а д а ч а 4. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки K и P — середины ребер BB_1 и A_1D_1 соответственно. Точка H делит ребро CC_1 пополам. Точка E принадлежит ребру B_1C_1 и $B_1E : EC_1 = 1:3$. Верно ли, что прямая KP пересекает прямые AE и A_1H?

Пусть плоскость проекции параллельна грани BB_1C_1C прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и прямая KP параллельна направлению проектирования. Получаем изображение параллелепипеда, на котором прямая KP изображена точкой (рис. 16.23). На этом рисунке прямая A_1H совпала с изображением прямой A_1D_1. Отрезок AK пересекает отрезок TB в его середине M. Поэтому треугольники MBK и EB_1K равны, и точки A, K и E лежат на одной прямой. Итак, на рис. 16.23 изображения прямых A_1H и AE проходят через точку $K = P$, т.е. эти прямые пересекают прямую KP.

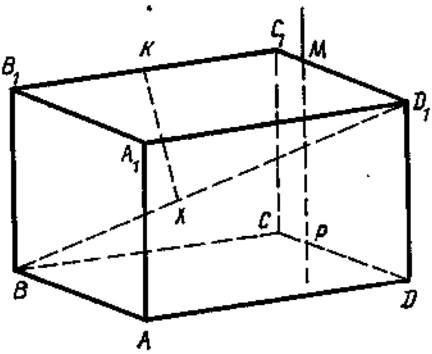


Рис. 16.24

Задача 5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 16.24), $\overline{B_1K} = \overline{KC_1}$, $\overline{CP} = 0{,}25\overline{CD}$, $\overline{C_1M} = 0{,}25\overline{C_1D_1}$. Точка X принадлежит прямой BD_1. Точка Y является точкой пересечения прямых KX и MP. Построить точку X.

Изображаем нижнее основание данного куба квадратом $ABCD$, а прямую MP – точкой $M = P$ (рис. 16.25). Точка X является пересечением прямых MK и B_1D. Треугольники FBK и MCK равны. Поэтому $XB_1 : XD = FB : MD = CM_1 : MD = 1{:}3$, т.е. $\overline{BX} = 0{,}5\overline{D_1B}$. Теперь легко построить точку X на рис. 16.24.

16.5. Параллельные прямые

При решении задач на доказательство параллельности прямых одна из данных прямых принимается на направление проектирования.

Задача 1. В произвольный треугольник ABC вписан параллелограмм $ADEF$ так, что вершины D, E, F лежат соответственно на сторонах AB, BC и AC. Через середину M стороны BC проведена прямая AM, пересекающая прямую DE в точке K. Доказать, что четырехугольник $CFDK$ является параллелограммом.

Считаем данный треугольник изображением прямоугольного равнобедренного треугольника ABC, у которого $AB = AC$ (рис. 16.26). В этом случае параллелограмм $ADEF$ изображается прямоугольником, а медиана AM – биссектрисой прямого угла BAC. Поэтому прямоугольные треугольники ADK и CFE равны и $DK = FC$. Итак, четырехугольник $DKCF$ – параллелограмм, поэтому и его образ является параллелограммом. Утверждение задачи доказано.

Задача 2. В пятиугольнике $ABCDE$ соответственно параллельны отрезки: AB и CE, BC и AD, CD и BE, DE и AC. Доказать, что отрезки AE и BD также параллельны между собой (рис. 16.27).

Изображаем параллелограмм $ABCF$ квадратом (рис. 16.28). По условию задачи отрезки DE и AC параллельны. Очевидно, что на рис. 16.28 отрезки FD и FE равны. При движении точки D по лучу FQ (от точки F) угол BCD увеличивается. Увеличивается также при этом и угол CBE. Поэтому на луче FQ существует единственная точка D, такая, что отрезки DE и AC, BE и CD параллельны между собой. Докажем, что в этом случае отрезок AE параллелен от-

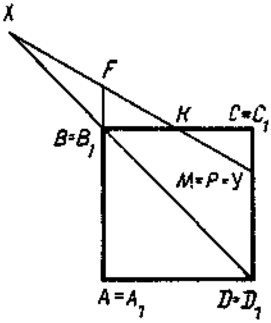


Рис. 16.25

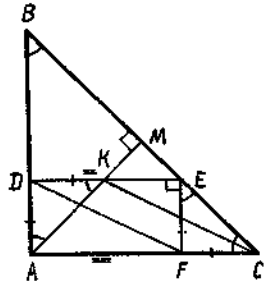


Рис. 16.26

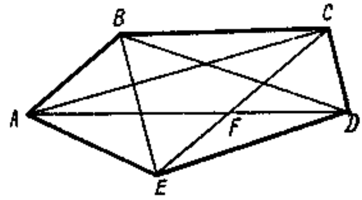


Рис. 16.27

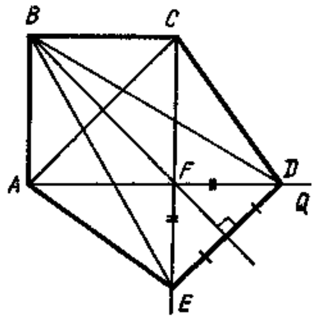


Рис. 16.28

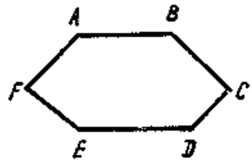


Рис. 16.29

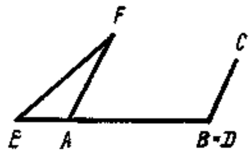


Рис. 16.30

резку BD. Точки A и C, D и E симметричны относительно BF. Поэтому трапеции $BCDE$ и $ABDE$ равны, и, следовательно, прямые AE и BD параллельны.

Решение этой задачи становится простым, если заметить, что из параллельности соответствующих сторон и диагоналей пятиугольника $ABCDE$ следует равновеликость треугольников ABC, BCD, CDE, DEA, ABE.

З а д а ч а 3. Дана замкнутая неплоская ломаная $ABCDEF$ (рис. 16.29). Доказать, что если противоположные звенья ломаной попарно параллельны, то они попарно равны.

Допустим, что $AB \neq DE$. Считаем прямую BD проектирующей. Тогда эта прямая изображается точкой $B = D$ (рис. 16.30), а точка E будет принадлежать прямой AB, причем точки A и E не совпадают. Получаем, что из точки F можно провести две различные прямые FA и FE, параллельные прямой BC. Полученное противоречие и доказывает, что $AB = DE$. Аналогично доказывается, что $FE = BC$ и $DC = FA$.

З а д а ч а 4. На рис. 16.31 показаны параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, произвольно расположенные в пространстве, $\overline{AM} = 0{,}25\overline{AA_1}$, $\overline{BH} = 0{,}25\overline{BB_1}$, $\overline{CP} = 0{,}25\overline{CC_1}$, $\overline{DT} = 0{,}25\overline{DD_1}$. Доказать, что четырехугольник $MHPT$ является параллелограммом.

Изображаем параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ квадратом, а прямую BA — точкой $B = A$ (рис. 16.32). На этом рисунке $\overline{MH} = 0{,}25\overline{A_1B_1}$ и $\overline{TP} = 0{,}25\overline{D_1C_1}$. Но $\overline{A_1B_1} = \overline{D_1C_1}$, поэтому $\overline{MH} = \overline{TP}$. Утверждение задачи доказано.

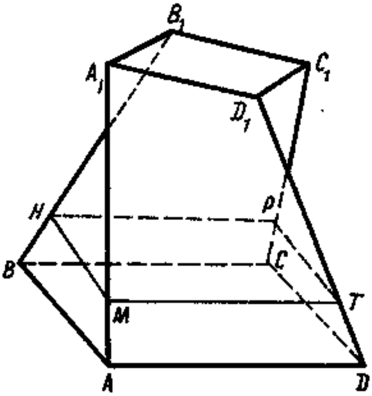


Рис. 16.31

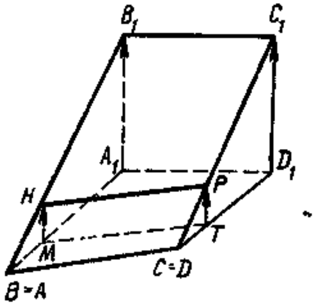


Рис. 16.32

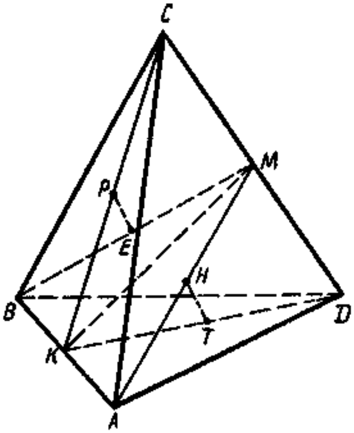


Рис. 16.33

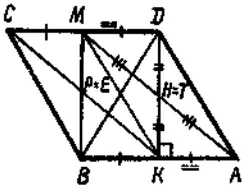


Рис. 16.34

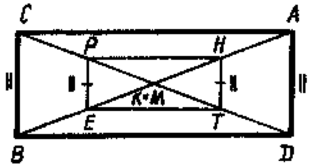


Рис. 16. 35

З а д а ч а 5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки K и M являются серединами соответственно отрезков AB и CD. Установить форму четырехугольника $PETH$, вершины P, E, T, H которого есть середины соответственно отрезков KC, BM, KD, AM (рис. 16.33).

Принимаем рис. 16.33 за изображение правильного тетраэдра $CABD$. Построим другое изображение этого тетраэдра, считая, что плоскость проекций параллельна его грани BAD, и приняв за направление проектирования прямую HT (рис. 16.34).

Так как точки H и T — середины отрезков AM и KD, то четырехугольник $KMDA$ является параллелограммом (рис. 16.34). Отсюда следует, что и четырехугольник $BCMK$ является параллелограммом, равным параллелограмму $KMDA$.

Следовательно, на рис. 16.34 отрезок PE изображается точкой $P = E$, т.е. отрезки PE и HT параллельны. Докажем, что $PE = HT$.

Для этого построим еще одно изображение правильного тетраэдра $ABCD$, приняв за направление проектирования прямую KM (рис. 16.35). Из рисунка понятно, что $PE = HT$.

Итак, четырехугольник $PETH$ является параллелограммом.

16.6. Параллельные прямые и плоскости

При решении задач на параллельность прямых и плоскостей одна из плоскостей изображается прямой.

З а д а ч а 1. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 16.36). Доказать, что не существует плоскости, которой параллельны прямые AB_1, BC_1 и CA_1.

Считаем прямую CA_1 проектирующей. При этом условии данная призма изображается фигурой, показанной на рис. 16.37. На этом чертеже прямые C_1B и AB_1 пересекаются, а прямая CA_1 изображена точкой $C = A_1$.

З а д а ч а 2. Дана произвольная треугольная пирамида $DABC$ (рис. 16.38), $\overline{BM} = k\overline{BA}$, $\overline{CP} = k\overline{CD}$, $\overline{BH} = n\overline{BC}$, $\overline{AE} = n\overline{AD}$. Доказать, что точка M принадлежит плоскости PHE.

Считаем прямую MP проектирующей. По условию задачи точки M и P делят отрезки AB и DC в одном и том же отношении, поэтому данная пирамида изображается трапецией $ADBC$ с основаниями AD и CB (рис. 16.39). Треугольники AMD и BMC гомотетичны относительно точки $M = P$. Точки E и H делят отрезки AD и BC в одном и том же отношении. Поэтому отрезок HE проходит через центр гомотетии $M = P$, а это означает, что отрезки MP и HE пересекаются. Утверждение задачи доказано.

З а д а ч а 3. Дана пространственная замкнутая ломаная $ABCDEFA$ (рис. 16.40). Точки M, K, P, Q, H, T — середины соответственно ее звеньев AB, BC,

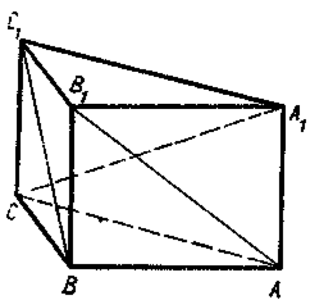


Рис. 16.36

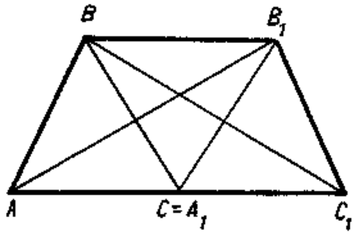


Рис. 16.37

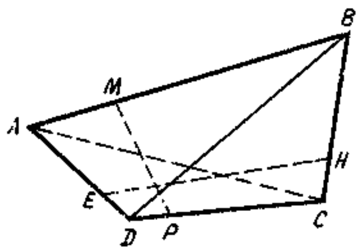


Рис. 16.38

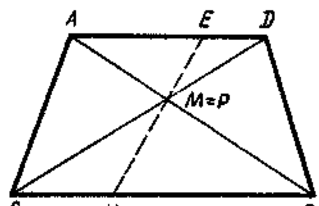


Рис. 16.39

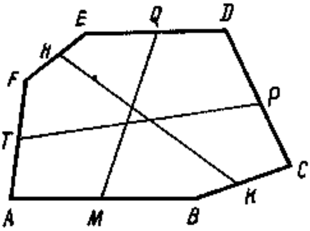


Рис. 16.40

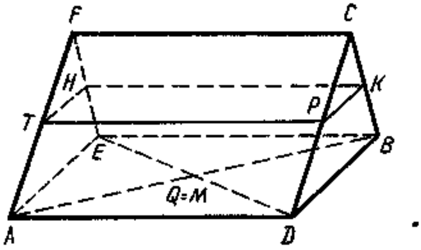


Рис. 16.41

CD, DE, EF, FA. Доказать, что прямые MQ, HK, PT параллельны одной и той же плоскости.

Считаем прямую QM проектирующей. Тогда точки A, E, B, D изображаются вершинами параллелограмма (рис. 16.41). Отрезки PK и TH изображают средние линии треугольников AEF и CBD, у которых $AE = BD$ и отрезки AE и BD параллельны. Поэтому отрезки TH и PK равны и параллельны. Следовательно, на рис. 16.41 прямые HK и TP изображаются параллельными прямыми, а прямая MQ — точкой $Q = M$.

16.7. Расстояние между точками

При определении расстояния между данными точками используем свойства ортогональной проекции.

З а д а ч а 1. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $MABCD$ равна 1, боковое ребро равно 2. Рассматриваются отрезки с концами X и Y на диагонали BD основания и ребре MC, параллельные плоскости MAD. Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков (рис. 16.42).

Изображаем грань MAD треугольником, подобным оригиналу, и в качестве проектирующей берем прямую BD. Получаем новое изображение данной пирамиды (рис. 16.43). Искомый отрезок XY параллелен плоскости MAD, поэтому он на рисунке изображается без искажения длины.

Теперь ясно, что на рис. 16.43 отрезок XY перпендикулярен к прямой MC. Пусть точка P — середина отрезка AD. Тогда

$$MC^2 = MP^2 + PC^2 = MD^2 - PD^2 + PC^2 =$$
$$= 4 - 0{,}25 + 2{,}25 = 6 \text{ и } MC = \sqrt{6}.$$

Следовательно, $\sin \angle PCM = MP : MC = \sqrt{5:8}$ и $XY = DY = DC \sin \angle PCM = 0{,}5\sqrt{2{,}5}$.

З а д а ч а 2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 16.44). Точки P и M — середины ребер AB и BB_1. Точка O — центр грани BCC_1B_1. Через точку O провести прямую, которая пересекает прямые AM и CP (в точках H и K соответственно). Вычислить длину отрезка HK, если длина ребра куба равна единице.

Пусть грань BCC_1B_1 параллельна плоскости проекции. За направление проектирования возьмем прямую AM. Получим изображение данного куба (рис. 16.45). На этом рисунке прямая AM и принадлежащая ей искомая точ-

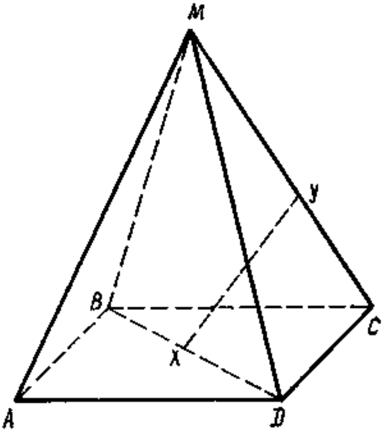


Рис. 16.42

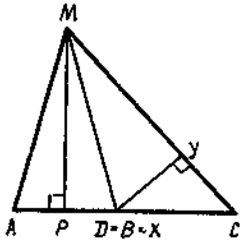


Рис. 6.43

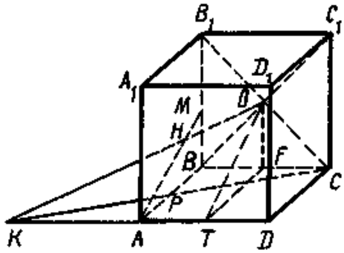


Рис. 16.44

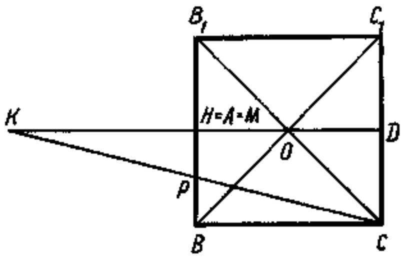


Рис. 16.45

ка H изображены серединой стороны BB_1 квадрата BB_1C_1C. Точка P — середина отрезка MB, поэтому искомая точка K принадлежит лучу CP, и $PK = PC$. Из рисунка также видно, что отрезок KH в два раза больше отрезка HO.

Теперь ясно, как построить точки K и H на рис.16.44. На луче DA строим такую точку K, что $KA = AD$. Точка H есть пересечение прямых KO и AM.

Строим середины F и T ребер BC и AD. Очевидно, что треугольники OFT и KTO – прямоугольные. Поэтому $TO^2 = OF^2 + TF^2 = 0{,}25 + 1 = 1{,}25$, $KO^2 = KT^2 + TO^2 = 2{,}25 + 1{,}25 = 3{,}5$. Отсюда $KO = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$. Так как $KH = \dfrac{2}{3}KO$, то $KH = \dfrac{\sqrt{14}}{3}$.

16.8. Перпендикулярность прямых и плоскостей

При решении задач на доказательство перпендикулярности прямых и плоскостей за направление проектирования принимается одна из прямых, принадлежащих плоскости, перпендикулярной к данной прямой.

З а д а ч а 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти на его поверхности точки, наиболее удаленные от прямой DB_1.

Строим ортогональную проекцию данного куба на плоскость AD_1C (рис.

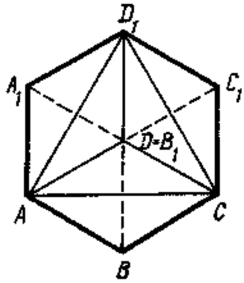


Рис. 16.46

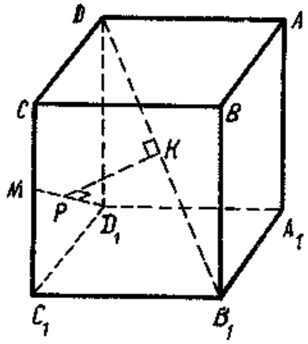


Рис. 16.47

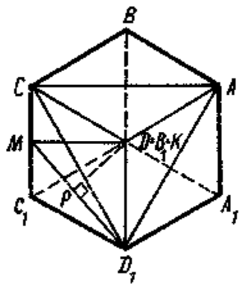


Рис. 16.48

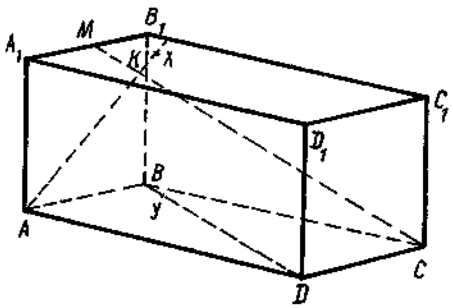


Рис. 16.49

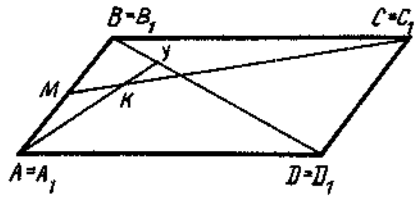


Рис. 16.50

16.46). Отрезок перпендикуляра к прямой DB_1 показан на этом рисунке без изменения его длины и проходит через точку $D = B_1$. Отсюда ясно, что наиболее удалены от прямой DB_1 вершины куба A, A_1, D_1, C_1, C, B. Если ребро куба равно a, то эти точки удалены от прямой DB_1 на расстояние $a\sqrt{2/3}$.

З а д а ч а 2. На рис. 16.47 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M делит его ребро CC_1 пополам. Пусть отрезок KP является общим перпендикуляром к прямым B_1D и D_1M. Найти, в каком отношении точка P делит отрезок D_1M.

Строим ортогональную проекцию данного куба на плоскость AD_1C (рис. 16.48). Отрезок KP параллелен плоскости AD_1C, потому что он перпендикулярен к прямой B_1D, а эта прямая перпендикулярна к плоскости AD_1C. В этой проекции перпендикулярные прямые KP и D_1M изображаются перпендикулярными прямыми (теорема о трех перпендикулярах). Поэтому на рис. 16.48 проводим перпендикуляр DP к прямой D_1M. На этом рисунке треугольник D_1DM прямоугольный (угол D прямой). Поэтому $D_1P : PM = D_1D^2 : DM^2 = 4:3$.

З а д а ч а 3. Фигура $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является кубом (рис. 16.49), $\overline{A_1M} = \overline{MB_1}$, $\overline{MK} = 0{,}25\,\overline{MC}$. Точки X и Y принадлежат соответственно прямым AK и BD. Прямая XY перпендикулярна к плоскости ABC. Построить точку Y.

Изображаем нижнее основание куба таким же параллелограммом, каким оно изображено на рис. 16.50. За изображение прямой AA_1 принимаем точку A. По условию задачи прямые AA_1 и XY параллельны, поэтому на рис. 16.50 точка Y является пересечением прямых BD и AK.

16.9. Площади многоугольников

При решении задач на вычисление площадей многоугольников используется равенство отношений площадей двух многоугольников, принадлежащих одной плоскости, и площадей их проекций на одну и ту же плоскость.

Задача 1. Доказать, что площади S_1 и S_2 многоугольников M_1 и M_2, расположенных в одной и той же плоскости α, относятся как площади S_1' и S_2' их проекций M_1' и M_2' на одну и ту же плоскость β.

Докажем сначала утверждение задачи для треугольников. Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ есть параллельная проекция треугольника ABC. Пусть, далее, точка K принадлежит стороне AB, точка P – стороне AC. Точки K_1 и P_1 – проекции точек K и P.

Обозначим $\angle BAC = \alpha$, $\angle B_1A_1C_1 = \alpha'$. Получаем: $S(ABC) = 0{,}5AB\cdot AC\sin\alpha$, $S(AKP) = 0{,}5AK\cdot AP\sin\alpha$, $S(A_1B_1C_1) = 0{,}5A_1B_1\cdot A_1C_1\sin\alpha'$, $S(A_1K_1P_1) = 0{,}5A_1K_1\cdot A_1P_1\sin\alpha'$. Отсюда следует:

$$\frac{S(ABC)}{S(AKP)} = \frac{AB\cdot AC}{AK\cdot AP}\ ;\ \frac{S(A_1B_1C_1)}{S(A_1K_1P_1)} = \frac{A_1B_1\cdot A_1C_1}{A_1K_1\cdot A_1P_1}.$$

Но $AB : AK = A_1B_1 : A_1K_1$ и $AC : AP = A_1C_1 : A_1P_1$. Утверждение задачи для треугольников доказано.

Так как всякий многоугольник можно разделить на треугольники, то утверждение задачи верно для любых многоугольников.

Задача 2. На продолжениях медиан AK, BH и CM данного треугольника ABC взяты точки P, E и T так, что $KP = 0{,}5AK$, $HE = 0{,}5BH$, $MT = 0{,}5CM$. Найти площадь треугольника PET, если площадь треугольника ABC равна единице.

За изображение данного треугольника принимаем правильный треугольник ABC (рис. 16.51). На этом рисунке второй треугольник изображается также правильным треугольником PET.

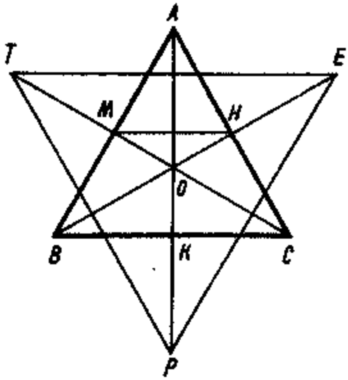


Рис. 16.51

По условию задачи $HE = 0{,}5\ BH$. Но $BH = 1{,}5\ BO$, поэтому $HE = 0{,}75\ BO$. Далее, $OH = 0{,}5\ BO$, следовательно, $OE = OH + HE = 0{,}5\ BO + 0{,}75\ BO = 1{,}25\ BO$. Правильные треугольники PET и ABC подобны. Поэтому $TP : AB = OE : BO = 1{,}25$, и площадь треугольника PET в $1{,}25^2$ раза больше площади треугольника ABC.

Используя утверждение предыдущей задачи, получаем, что площадь треугольника PET равна $1{,}25^2$.

17. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

17.1. Место и роль стереометрических задач в школьном курсе математики

Стереометрические задачи занимают особое место в школьном курсе математики. Их содержание и используемые методы решения позволяют в комплексе применять важнейшие знания, умения и навыки учащихся по арифметике, алгебре, тригонометрии, планиметрии, стереометрии, началам анализа. Сочетание в одной задаче построений, вычислений, доказательств, исследований как нельзя лучше содействует развитию математической культуры и пространственного воображения учащихся.

Умение решать стереометрические задачи является важнейшим критерием математической подготовки не только выпускника средней школы, но и учителя математики. Не случайно, что практически во всех университетах, технических вузах, педагогических институтах абитуриентам предлагают стереометрические задачи. И многие из них не справляются с этими задачами. Нас может удовлетворить тольке та методика обучения решению стереометрических задач, которая позволяет учить сравнению, анализу, синтезу, абстрагированию, обобщению, конкретизации, выдвижению гипотез на основе вычислений и инструментальных построений.

Почему сложны стереометрические задачи? Во-первых, для уяснения содержания этих задач нужен определенный уровень пространственного воображения. Во-вторых, ограниченны возможности моделирования, так как под руками не всегда есть необходимый материал и достаточное для этой работы время. В-третьих, даже очень хороший проекционный чертеж не всегда подсказывает, какие дополнительные построения или геометрические преобразования целесообразно выполнить. В-четвертых, возможности выдвигать гипотезы на основе инструментальных построений крайне ограниченны, и гипотезы трудно проверять путем измерений отрезков и углов. Поэтому приходится прибегать к разного рода сечениям пространственных фигур, строить их без искажения формы, строить развертки многогранников и фигур вращения, рассматривать различные предельные случаи.

При решении стереометрических задач используются все теоремы и формулы планиметрии, в частности признаки равенства и подобия треугольников, теорема Пифагора, зависимости между сторонами и углами прямоугольного треугольника, теоремы косинусов и синусов, различные формулы площади треугольников и четырехугольников (обобщенная формула площади четырехугольника $S = 0{,}5ab\sin\varphi$, где a и b — его диагонали и φ — угол между ними, используется и для вычисления площади треугольника).

При решении стереометрических задач используются методы составления уравнений, координат, векторный, синтетический; алгоритмические методы; методы параллельных проекций, геометрических функций, полной индукции, конструктивные (на проекционном чертеже, в воображении, на развертках фигур).

Рациональное решение задач обеспечивается комплексным применением различных методов. После целесообразных дополнительных построений задачи на вычисления часто можно решить устно.

17.2. Определение величин элементов многогранников

На рис. 17.1 изображен прямоугольный трехгранный угол $OABC$, у которого углы AOC и BOC острые, а двугранный угол при ребре OC прямой. Обозначим $\angle BOC = \alpha$, $\angle AOC = \beta$, $\angle AOB = \gamma$, двугранные углы, образованные соответственно полуплоскостями COA и AOB, COB и BOA, через A и B.

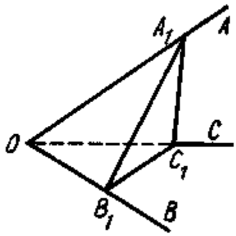


Рис. 17.1

Докажем следующие свойства прямоугольного трехгранного угла $OABC$:

$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$; $\quad$ $\operatorname{tg}\beta = \sin\alpha \operatorname{tg} B$;

$\sin\beta = \sin\gamma\sin B$; $\quad$ $\cos A = \cos\alpha\sin B$;

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\gamma\cos B$; $\quad$ $\cos\gamma = \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B$.

Отметим на луче OA произвольную точку A_1. Пусть $OA_1 = 1$. Строим отрезок A_1C_1, перпендикулярный к лучу OC, и отрезок C_1B_1, перпендикулярный к лучу OB.

Так как плоскости AOC и COB взаимно перпендикулярны, то прямая A_1C_1 перпендикулярна к плоскости $KCOB$. Отсюда следует, что отрезок A_1C_1 перпендикулярен к отрезкам C_1B_1 и OB_1. Таким образом, отрезок OB_1 перпендикулярен к прямым B_1C_1 и A_1C_1. Поэтому прямая OB_1 перпендикулярна к плоскости $A_1B_1C_1$ и к прямой A_1B_1. Теперь ясно, что $\angle A_1B_1C_1 = B$. Получаем (соответственно из треугольников OB_1A_1, OB_1A_1, OC_1A_1 и OC_1A_1):

$$B_1A_1 = OA_1\sin\gamma = \sin\gamma; \tag{17.1}$$

$$OB_1 = OA_1\cos\gamma = \cos\gamma; \tag{17.2}$$

$$A_1C_1 = OA_1\sin\beta = \sin\beta; \tag{17.3}$$

$$OC_1 = OA_1\cos\beta = \cos\beta. \tag{17.4}$$

Из равенства (17.4) и треугольника OB_1C_1 имеем:

$$B_1C_1 = CO_1\sin\alpha = \cos\beta\sin\alpha. \tag{17.5}$$

Из треугольника $A_1C_1B_1$ и равенств (17.3) и (17.5) следует:

$$\operatorname{tg} B = A_1C_1 : B_1C_1 = \sin\beta : (\cos\beta\sin\alpha) = \operatorname{tg}\beta : \sin\alpha.$$

Отсюда вытекает справедливость равенства $\operatorname{tg}\beta = \sin\alpha \operatorname{tg} B$.

Из треугольника OB_1C_1 и равенств (17.2) и (17.4) получаем $OB_1 = OC_1\cos$ и $\cos\gamma = \cos\beta\cos\alpha$. Этим доказана справедливость равенства $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.

Из треугольника $B_1C_1A_1$ и равенств (17.1) и (17.3) находим

$$\sin B = A_1C_1 : B_1A_1 = \sin\beta : \sin\gamma.$$

Отсюда получаем равенство $\sin\beta = \sin\gamma\sin B$.

Из треугольников $A_1C_1B_1$, OB_1C_1 и OB_1A_1 следует:

$$\cos B = B_1C_1 : B_1A_1 = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\gamma.$$

Равенство $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\gamma\cos B$ доказано.

Из равенства $\operatorname{tg}\beta = \sin\alpha\operatorname{tg} B$ получаем равенство

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg}\beta : \sin\alpha. \tag{17.6}$$

Оно выражает $\operatorname{tg} B$ через $\operatorname{tg}\beta$ и $\sin\alpha$. Применив это равенство для выражения $\operatorname{tg} A$, имеем:

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg}\alpha : \sin\beta. \tag{17.7}$$

Перемножаем почленно равенства (17.6) и (17.7):

$$\operatorname{tg} B\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha}\ \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta\sin\alpha}\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha\sin\beta} = \frac{1}{\cos\beta\cos\alpha}.$$

Но $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$. Поэтому

$$\operatorname{tg} B\operatorname{tg} A = \frac{1}{\cos\gamma} \Rightarrow \cos\gamma = \operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} A.$$

Равенство $\cos\gamma = \operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B$ доказано.

Из равенства $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\gamma\cos B$ следует $\cos B = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\gamma$. Применив это равенство для выражения $\cos A$ через $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{tg}\gamma$, получим

$$\cos A = \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma. \tag{17.8}$$

Из равенства $\sin\beta = \sin\gamma\sin B$ следует

$$\sin B = \sin\beta : \sin\gamma. \tag{17.9}$$

Разделив почленно равенство (17.9) на (17.8), имеем:

$$\frac{\sin B}{\cos A} = \frac{\sin\beta\operatorname{tg}\gamma}{\sin\gamma\operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin\beta\sin\gamma\cos\beta}{\sin\gamma\cos\gamma\sin\beta} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Из равенства $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$ находим $\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, поэтому

$$\frac{\sin B}{\cos A} = \frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin B\cos\alpha = \cos A.$$

Равенство $\cos\gamma = \operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B$ доказано.

Доказанные формулы целесообразно использовать при решении большинства задач на определение величин элементов многогранников и круглых тел.

Задача 1. На рис. 17.2 изображена правильная четырехугольная пирамида $MABCD$. Точка O есть пересечение отрезков AC и BD. Угол MAO равен 60°. Найти: угол MAB; двугранный угол, образованный полуплоскостями BAM и AMO; двугранный угол между полуплоскостями BAM и AMD; двугранный угол между полуплоскостями MAB и ABO.

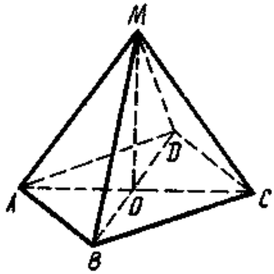


Рис. 17.2

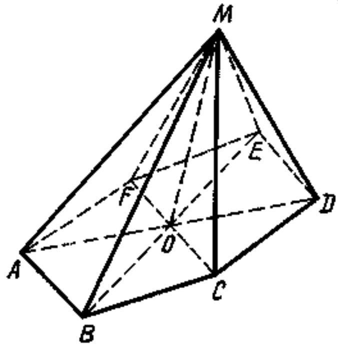


Рис. 17.3

1. Рассмотрим прямоугольный трехгранный угол $AOMB$. У него известны $\angle OAB = 45°$ и $\angle MAO = 60°$. В обозначениях доказанных формул $\angle OAB = \alpha = 45°$, $\angle MAO = \beta = 60°$, $\angle MAB = \gamma$. Поэтому для определения величины угла MAB используем формулу $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$:

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta = \cos 45° \cos 60° = 0{,}5\sqrt{2}\cdot 0{,}5 \approx 0{,}35;\ \gamma \approx 20°.$$

2. В обозначениях доказанных формул $\angle OAB = \beta = 45°$, $\angle MAO = \alpha = 60°$, двугранный угол, образованный полуплоскостями BAM и AMO, равен B, поэтому для определения величины угла A можно применить формулу $\operatorname{tg}\beta = \sin\alpha \operatorname{tg}\beta$ к прямоугольному трехгранному углу $AOMB$:

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg}\beta : \sin\alpha = \operatorname{tg} 45° : \sin 60° = 1 : \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}18;\ B \approx 50°.$$

3. Двугранный угол, образованный полуплоскостями BAM и AMD, в два раза больше двугранного угла, образованного полуплоскостями BAM и AMO. Поэтому угол между полуплоскостями BAM и AMD равен 100°.

4. Для определения угла между полуплоскостями MAB и ABO применим формулу $\operatorname{tg}\beta = \sin\alpha \operatorname{tg} B$ к прямоугольному трехгранному углу $AOMB$:

$$\operatorname{tg}\angle\ (BAM, ABO) = \operatorname{tg} 60° : \sin 45° \approx 2{,}43;\ \angle\ (BAM, ABO) \approx 68°.$$

Задача 2. На рис. 17.3 изображена правильная шестиугольная пирамида $MABCDEF$. Площадь ее основания равна 12. Угол MAO равен 45° (O – основание высоты пирамиды). Найти площадь S боковой поверхности пирамиды.

Боковая поверхность шестиугольной пирамиды $MABCDEF$ состоит из шести равных между собой треугольников. Поэтому достаточно найти площадь одного из них, например треугольника MAB. Но треугольник ABO – ортогональная проекция треугольника MAB на плоскость основания пирамиды. Поэтому $S_{ABM} = S_{ABO} : \cos\varphi$, где $\varphi = \angle\ (MAB, ABO)$. Площадь треугольника ABO равна 2. Следовательно, для решения задачи достаточно найти $\cos\varphi$.

Угол, образованный полуплоскостями MAB и ABO, является двугранным углом трехгранного угла $AOMB$, у которого $\angle MAO = 45°$, $\angle OAB = 60°$. Применив к трехгранному углу $AOMB$ формулу $\operatorname{tg}\beta = \sin\alpha \operatorname{tg} B$, получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}45° : \sin 60° = 2 : \sqrt{3}.$$

Но $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\varphi} - 1}$. Отсюда

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1; \quad \frac{1}{\cos^2\varphi} = \operatorname{tg}^2\varphi + 1 =$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 = \frac{7}{3}.$$

Итак,

$$S(ABM) = 2\,\frac{1}{\cos^2\varphi} = 2\sqrt{7/3}; \quad S = 6\cdot 2\sqrt{7/3} = 4\sqrt{21}.$$

З а д а ч а 3. На рис. 17.4 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AD = 4$, $AB = 3$, $AA_1 = 10$. Точка M — середина ребра AA_1. Найти величину двугранного угла, образованного полуплоскостями ABD и BDM.

Искомый угол является двугранным углом прямоугольного трехгранного угла $DAMB$. У прямоугольных треугольников BAD и MAD известны катеты, поэтому можно определить любую тригонометрическую функцию углов ADM и ADB. Следовательно, для решения задачи целесообразно применить формулу

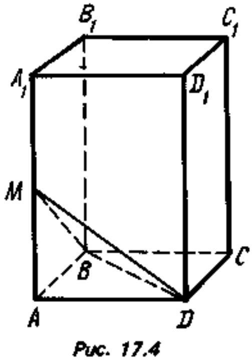


Рис. 17.4

$$\operatorname{tg}\beta = \sin\alpha \operatorname{tg} B:$$

$$\operatorname{tg}\angle\ (ABD, BDM) = \operatorname{tg}\angle BDM : \sin\angle ADB;$$

$$\operatorname{tg}\angle ADM = AM : AD = (10:2):4 = 5:4;$$

$$\sin\angle ADB = AB : BD = AB : \sqrt{AB^2 + AD^2} = 3:5.$$

Итак, $\operatorname{tg}\angle\ (ABD, BDM) = \dfrac{5}{4} : \dfrac{3}{5} = 25 : 12 \approx 2{,}08;$

$$\angle\ (ABD, BDM) \approx 64°.$$

17.3. Требования к изображениям пространственных фигур

Изображение геометрической фигуры должно быть верным, наглядным и простым в исполнении. Однако нужно иметь в виду, что не всякое наглядное, верное и простое в исполнении изображение пространственной фигуры помогает понять суть задачи и найти наиболее простое ее решение.

З а д а ч а 1. В треугольной пирамиде $DABC$ плоские углы при вершине D прямые. Построить изображение центра O описанного вокруг этой пирамиды шара и найти его радиус, если $AD = 6$, $DC = 8$, $DB = 24$.

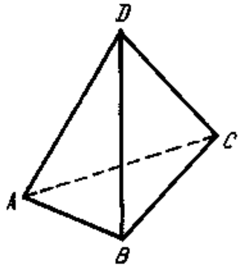


Рис. 17.5

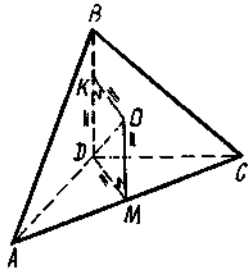


Рис. 17.6

Сравним рис. 17.5 и 17.6. И ученики, и студенты, и многие опытные учителя математики обычно пытаются решить задачу с помощью рис. 17.5 и не могут. Второй рисунок выручит и в том случае, если ученик намерен решать эту задачу методом координат.

17.4. Методика работы над стереометрической задачей

Начинать работу над задачей следует с уяснения ее содержания. Если речь идет о многограннике или фигуре вращения, необходимо с самого начала установить их форму. Для этого используются все доступные средства и методы: готовые модели, построение модели по условию задачи, проекционный чертеж, готовые развертки исследуемой фигуры, дополнительные построения на проекционном чертеже,модели или развертке, различные изображения одной и той же фигуры с целью получения наиболее наглядного изображения фигуры для решения именно данной задачи, построение различных сечений (разрезов) исследуемой фигуры (без искажения их формы).

З а д а ч а 1. Основанием треугольной пирамиды $ABCD$ является треугольник ABC, в котором угол A прямой, угол ACB равен $30°$, $BC = 2\sqrt{2}$. Длины ребер AD, BD, CD равны между собой. Сфера радиусом, равным 1, касается ребер AD, BD, продолжения ребра CD за точку D и плоскости BAC. Построить изображение центра O этой сферы и найти длину отрезка касательной, проведенной из точки A к сфере.

Основание данной пирамиды – прямоугольный треугольник ABC, а боковые ребра ее равны, поэтому высотой пирамиды является отрезок DH (H – середина гипотенузы BC треугольника ABC) .

Данная сфера касается ребер AD и BD, поэтому ее центр O принадлежит плоскости α симметрии лучей DB и DA. Так как треугольник ABH правильный, то плоскость α проходит через точку H и середину K отрезка BA (рис. 17.7) Данная сфера касается ребра BD и луча DC_1 (продолжения ребра CD за точку D), поэтому точка O принадлежит плоскости симметрии β лучей DB и DC_1.

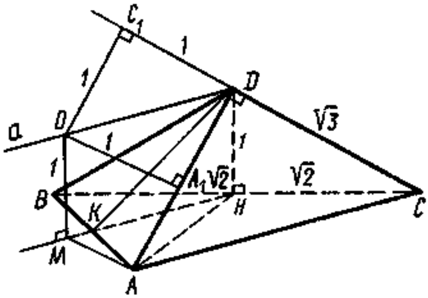


Рис. 17.7

Итак, плоскость α перпендикулярна к плоскости BAC, а плоскость β перпендикулярна к плоскости BDC и делит внешний угол C_1DB равнобедренного треугольника BDC пополам. Поэтому плоскости α и β пересекаются по прямой a, проходящей через точку D и параллельной прямой HK (рис. 17.7).

Таким образом, точка O лежит на прямой a. Отсюда следует, что четырехугольник $MODH$ является прямоугольником (M — точка касания сферы с плоскостью ABC), и $DH = MO = 1$.

Итак, прямая OD параллельна прямой HM, а HM параллельна AC. Поэтому прямые OD и AC параллельны, т.е. точка O принадлежит плоскости C_1DA.

Очевидно, что $AC = BC\sin 60° = 2\sqrt{2}\cdot 0{,}5\sqrt{3} = \sqrt{6}$. По теореме, обратной теореме Пифагора, получаем, что угол ADC прямой. Так как $OC_1 = OM = 1$, то четырехугольник OC_1DA_1 является квадратом со стороной, равной 1. Следовательно, искомый отрезок касательной, проведенной из точки A к сфере, равен $\sqrt{3} - 1$.

Теперь понятно построение точки O на рис. 17.7. Через точку D проводим прямую a, параллельную прямой HK. На продолжении ребра DC (за точку D) откладываем отрезок $DC_1 = 1$. Через точку C_1 проводим прямую, параллельную прямой DA. Она пересекается с прямой a в искомой точке O.

При решении задачи на комбинацию многогранника и сферы не следует изображать различные сечения сферы (эллипсы). Достаточно правильно построить центр сферы и точки касания ее с некоторыми прямыми или плоскостями.

Если в задаче явно не говорится о многограннике, путем дополнительных построений необходимо свести ее решение к решению многогранников. Таким образом можно сформулировать условие задачи более понятно, особенно для ученика с недостаточно развитым пространственным воображением.

З а д а ч а 2. Даны три попарно скрещивающиеся прямые a, b и c, не параллельные одной плоскости. Через данную точку M провести плоскость, пересекающую эти прямые в точках A, B, C так, чтобы точки A, B, C, M были вершинами параллелограмма.

Всякие две скрещивающиеся прямые задают единственную пару параллельных плоскостей, каждая из которых проходит через одну из этих прямых. Поэтому данные три попарно скрещивающиеся прямые a, b и c определяют

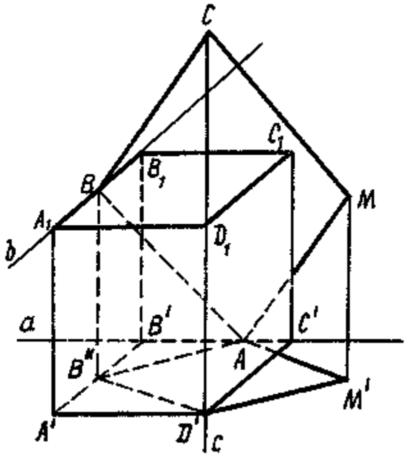


Рис. 17.8

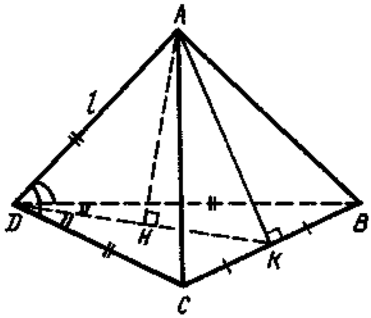


Рис. 17.9

шесть плоскостей, ограничивающих параллелепипед $A'B'C'D'A_1B_1C_1D_1$ (рис. 17.8).

Пусть M' — параллельная прямой c проекция точки M на плоскость $A'B'C'$. Проекция искомого параллелограмма $ABCM$, параллельная прямой c, является параллелограммом $AB''D'M'$.

Таким образом, задача свелась к построению на плоскости $A'B'C'$ параллелограмма $AB''D'M'$. Положение его вершин D' и M' известно, а вершины A и B'' лежат соответственно на прямых a и $A'B'$. Точки A и B'' легко строятся методом гомотетии или центральной симметрии.

Точки B и C получаем следующим образом. Через точку B'' проводим прямую, параллельную прямой c. Она пересекает прямую b в точке B. Построение четвертой вершины C параллелограмма $ABCM$ очевидно.

Задача имеет два решения, потому что существуют два отрезка с концами на прямых a и $A'B'$ (равных и параллельных отрезку $M'D'$).

Учащиеся должны понимать, что основанием треугольной пирамиды можно считать любую ее грань. Без понимания этой простой истины даже хорошему ученику становятся непосильными многие стереометрические задачи.

З а д а ч а 3. Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину l. Два плоских угла при вершине пирамиды равны α, а третий — β. Найти объем V пирамиды.

Считаем грань DBC основанием пирамиды $ADBC$, у которой $DA = DB = DC = l$, $\angle ADB = \angle ADC = \alpha$, $\angle BDC = \beta$ (рис. 17.9).

Основание H высоты AH пирамиды лежит на прямой DK ($CK = KB$). Получаем $S_{DBC} = 0{,}5\,l^2 \sin\beta$. Отсюда

$$AH = DA \sin\angle ADH. \tag{17.10}$$

Но угол ADH является гранью прямоугольного трехгранного угла $DAKC$ (D — его вершина, двугранный угол при ребре DK прямой). Поэтому $\cos\angle ADH \times \cos\angle KDC = \cos\angle ADC$. Отсюда

$$\cos\angle ADH = \cos a : \cos\frac{\beta}{2}\ ;\ \sin\angle ADH = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 a}{\cos^2(\beta/2)}}\ . \quad (17.11)$$

Используя равенства (17.10) и (17.11), получаем

$$V = \frac{1}{6} l^3 \sqrt{\sin^2\beta - 4\sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2 a}\ .$$

Если же считать основанием данной пирамиды треугольник ABC, объем вычислений многократно возрастает.

Изображение исследуемой фигуры должно быть наглядным применительно к данной задаче. На изображении целесообразно отметить данные и искомые элементы (в необходимых случаях предварительно выполняются дополнительные построения). Рядом с чертежом кратко записывается остальная информация. Данные и искомые элементы целесообразно изображать разным цветом. Проекционный чертеж должен содержать максимум необходимой информации о соответствующей фигуре. После этого следует выяснить, при каких значениях параметров задача имеет решение, т.е. установить условия существования стереометрических фигур, о которых говорится в задаче. Следует иметь в виду, что по ответу (формуле) это сделать трудно и не всегда возможно. Предварительно проведенное исследование упрощает дальнейшую работу над задачей.

Рассмотрим следующий пример: боковая поверхность треугольной пирамиды равна S, каждое из боковых ребер l. Найти плоские углы при вершине пирамиды, зная, что они образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной $\pi/3$.

Решив задачу, получаем ответ: $\arcsin\frac{S}{l^2} - \frac{\pi}{3}$, $\arcsin\frac{S}{l^2}$, $\arcsin\frac{S}{l^2} + \frac{\pi}{3}$.

Однако такой пирамиды не существует. В самом деле, если наименьший из искомых углов равен α, то второй $\alpha + \pi/3$, а третий $\alpha + 2\pi/3$. Но во всяком трехгранном угле $\alpha + 2\pi/3 < \alpha + (\alpha + \pi/3)$, т.е. $\alpha > \pi/3$, и наибольший из искомых углов должен быть больше π.

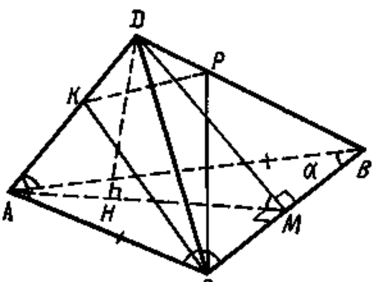


Рис. 17.10

Задача 4. В основании пирамиды $DABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC = 1$, $\angle ABC = a$). Плоскость DBC составляет с плоскостью ABC угол величиной α, $\angle DAB = \angle DAC = \alpha$. Высота DH пирамиды расположена внутри ее (рис. 17.10). Найти объем пирамиды $KDPC$, если точки K и P принадлежат соответственно ребрам AD и BD, а площадь треугольника KDP относится к площади треугольника ABD, как 4:25.

При каком значении α объем пирамиды $KDPC$ наибольший?

Для существования пирамиды $DABC$ необходимы следующие условия:

1) $\angle DAB + \angle DAC > \angle BAC$, т.е. $45° < \alpha < 90°$; (17.12)

2) $\angle DAM + \angle AMD < 180°$ (это неравенство является следствием условия (17.12), так как $\angle DAM < \alpha$).

Задача сводится к решению треугольников ABC, ADM и прямоугольного трехгранного угла $AMDB$. Получаем

$$V(KDPC) = \frac{4}{75}\ \frac{\sin^3\alpha\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\sin\alpha + \sqrt{-\cos 2\alpha}}\ . \qquad (17.13)$$

Очевидно, что объемы пирамид $KDPC$ и $ABCD$ относятся как площади треугольников KDP и ABD.

Для получения ответа на второй вопрос задачи преобразуем формулу (17.13):

$$V(KDPC) = \frac{4}{75}\ \frac{1}{\dfrac{1}{\sin^2\alpha\sqrt{-\cos 2\alpha}} + \dfrac{1}{\sin^2\alpha}}\ .$$

Теперь ясно, что функция $V(\alpha) = V(KDPC)$ монотонная на интервале $(\pi/4;\ \pi/2)$. Поэтому не существует такого значения α, при котором объем пирамиды $KDPC$ принимает наибольшее значение.

При решении стереометрических задач на доказательство и вычисление важно получить дополнительные сведения о свойствах исследуемой фигуры (хотя бы сначала в виде правдоподобных гипотез). При решении планиметрических задач на доказательство такие гипотезы можно получить путем инструментальных построений и измерений. В стереометрии такой метод практически ничего не дает. Поэтому приходится рассматривать сначала различные частные случаи данной задачи. Такая работа помогает подметить общие закономерности и упрощает поиск решений сложных стереометрических задач.

Задача 5. Через каждую вершину треугольной пирамиды проведена плоскость, содержащая центр окружности, описанной вокруг противоположной грани, и перпендикулярная к противоположной грани. Доказать, что эти четыре плоскости пересекаются в одной точке X.

Рассмотрим сначала треугольную пирамиду $DABC$, у которой плоские углы ACD, ABC, ABD и BCD прямые и $AB = BC$ (рис. 17.11). Чем она хороша для получения рабочей гипотезы? Да тем, что для нее легко строятся центры окружностей, описанных вокруг граней, и основания четырех ее высот.

Прямая DC перпендикулярна к плоскости ABC, и середина M ребра AC является центром окружности, описанной вокруг грани ABC. Поэтому плоскость ACD является

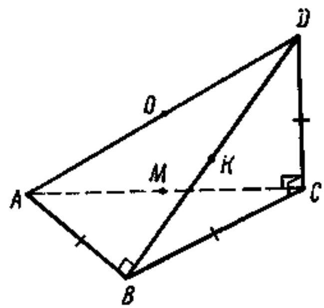


Рис. 17.11

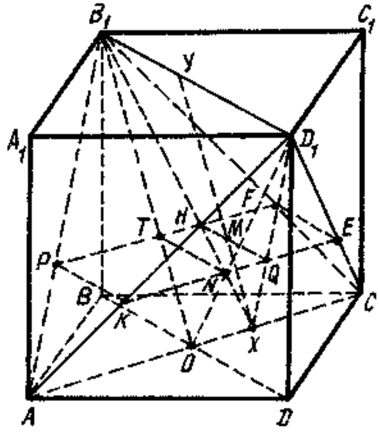


Рис. 17.12

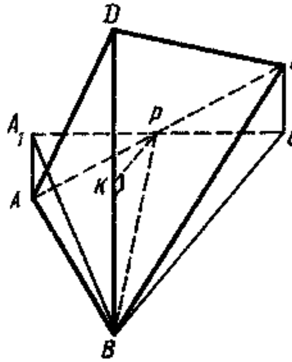


Рис. 17.13

одной из четырех рассматриваемых в задаче плоскостей.

Прямая MB перпендикулярна к плоскости ACD. Середина O ребра AD является центром окружности, описанной вокруг грани ACD. Поэтому плоскость MOB — одна из исследуемых четырех плоскостей.

Очевидно, что плоскости ABD и KOC (K — середина ребра BD) являются третьей и четвертой из рассматриваемых в данной задаче. Плоскости ACD, MOB, ABD и KOC пересекаются в точке O, которая является центром сферы, описанной вокруг пирамиды $ABCD$ (рис. 17.11).

Таким образом, появилась гипотеза, что точкой X является центр описанной вокруг любой треугольной пирамиды сферы.

Эта гипотеза легко доказывается. Пусть, например, точка P — центр описанной вокруг треугольника ABC окружности, а DH — высота пирамиды, проведенная к грани ABC. Тогда прямые XP и DH параллельны, так как они перпендикулярны к плоскости ABC и, следовательно, принадлежат одной плоскости.

З а д а ч а 6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; X — любая точка отрезка AC; Y — любая точка отрезка B_1D_1. Найти геометрическое место точек M отрезка XY, если точка M принадлежит отрезку XY и $YM : MX = 2 : 1$ (рис. 17.12).

Для получения гипотезы о свойствах искомого геометрического места точек M рассмотрим несколько "хороших" положений точек X и Y.

Пусть точка X совпадает с точкой A. При движении точки Y по отрезку B_1D_1 точка M будет двигаться по отрезку PK, параллельному прямой B_1D_1, потому что отрезок PK гомотетичен отрезку B_1D_1 относительно центра A (коэффициент гомотетии $k = 1/3$).

Пусть точка X совпадает с точкой C. При движении точки Y по отрезку B_1D_1 точка M движется по отрезку FE, параллельному прямой B_1D_1. Очевидно, что отрезки PK и FE параллельны и $PK = FE = \frac{1}{3}B_1D_1$. Пусть X — произвольная точка отрезка AC. При движении точки Y по отрезку B_1D_1 точка M описывает отрезок HQ. Он параллелен прямой B_1D_1, и $HQ = \frac{1}{3}B_1D_1$.

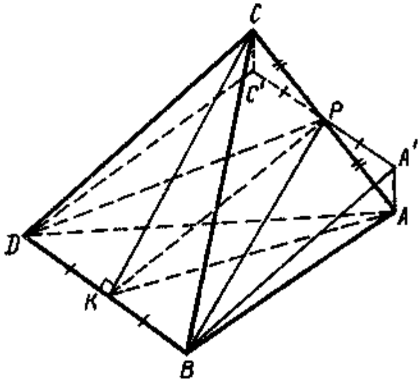


Рис. 17.14

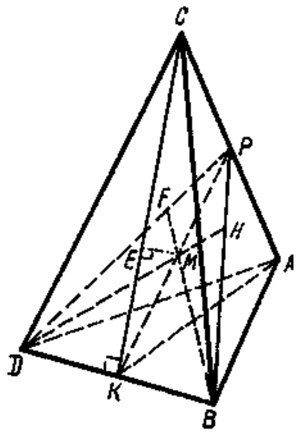


Рис. 17.15

Аккуратно выполненные построения позволяют сделать предположение, что точка H принадлежит отрезку KE (рис. 17.12), потому что ортогональной проекцией отрезков PK, HQ и FE на плоскость BB_1D_1 является отрезок TN. Отсюда следует, что четырехугольник $PFEK$ — прямоугольник.

Задача решается еще более просто, если воспользоваться свойствами параллельных (ортогональных) проекций.

З а д а ч а 7. В треугольной пирамиде $DABC$ ребро $DB = 1$, $AC = \sqrt{6}$. Площади граней ADB и BDC равны. Площадь грани ADC в два раза больше площади грани ABD. Прямая KP проходит через середину ребра DB и пересекает ребро AC в некоторой точке P. Углы DKP и APK прямые. Внутри пирамиды $BCAD$ существует такая точка M, что сумма $DM + MB$ равна сумме расстояний от точки M до всех четырех граней пирамиды $ABCD$. Найти расстояние от точки M до вершины D.

Что следует из того, что площади треугольников ABD и BDC равны? У них общая сторона BD. Поэтому равны их высоты, проведенные к стороне BD (рис. 17.13). Пусть треугольник BA_1C_1 есть ортогональная проекция треугольника BAC на плоскость, перпендикулярную к прямой BD (рис. 17.13). Очевидно, что треугольник BA_1C_1 равнобедренный ($BA_1 = BC_1$) и BP — его высота. Следовательно, $A_1P = PC_1$ и $AP = PC$.

Таким образом, отрезок KP — общий перпендикуляр к скрещивающимся ребрам AC и BD пирамиды $ABCD$, и точки K и P — середины отрезков DB и AC. А это значит, что если точки A' и C' являются ортогональными проекциями вершин A и C на плоскость DBP, то четырехугольник $DC'A'B$ — прямоугольник (рис. 17.14). А из прямоугольных треугольников $DC'C$ и $AA'B$ следует, что ребра DC и AB равны. Аналогично доказывается, что ребра BC и DA равны. А это означает, что равны между собой и треугольники CDB и ABD, BAC и DCA.

Таким образом, получены некоторые гипотезы о свойствах исследуемой пирамиды $DABC$. Но форма ее пока не установлена. Правда, мы знаем, что площадь треугольника ADC в два раза больше площади треугольника ABD. Но это может быть при любом угле между скрещивающимися прямыми DB и AC. В таком случае естественно предположить, что угол между прямыми DB и AC прямой, и при этом допущении решить задачу. Если решения не будет, придется искать другой путь. Если решение такая "хорошая" пирамида будет иметь, останется выяснить, нет ли решений и в том случае, если угол между прямыми DB и AC острый.

Итак, допустим, что прямые DB и AC взаимно перпендикулярны. Тогда очевидно, что $DC = BC = DA = BA$ (рис. 17.15). Кроме того, перпендикулярны между собой плоскости CDA и DBP, DBP и ABC. А это означает, что высоты DH и BF равнобедренного треугольника PDB являются и высотами пирамиды $DABC$ (рис. 17.15).

Плоскости DPB и CKA — это плоскости симметрии "хорошей" пирамиды $DABC$ (рис. 17.15). Поэтому естественно предположить, что для этой пирамиды искомая точка M совпадает с точкой пересечения высот треугольника DPB. Значит, есть смысл изучить детальнее свойства этого треугольника. У него сторона $DB = 1$. Высота KP является катетом прямоугольных треугольников KPC и DKP. Боковая сторона DP является высотой равнобедренного треугольника DCA, площадь которого в два раза больше площади треугольника DBC.

Обозначим $KP = x$. Получим:

$$DP = \sqrt{0{,}25 + x^2}\ ;\ S(CDA) = 0{,}5CA \cdot DP = 0{,}5\sqrt{6}\sqrt{0{,}25 + x^2}\ ;$$

$$CK = \sqrt{CP^2 + KP^2} = \sqrt{(0{,}5\sqrt{6})^2 + x^2};\ S(DBC) = 0{,}5\,DB \cdot KC =$$

$$= 0{,}5 \cdot 1\sqrt{(0{,}5\sqrt{6})^2 + x^2}\ .$$

Решив уравнение $S(CDA) = 2S(DCB)$, получим $x = KP = 1{,}5$. Углы KPB и HDB равны. Поэтому $\operatorname{tg} \angle HDB = \operatorname{tg} \angle KPB = HB : KP = 1:3$, т.е. $MK = 1 : 6$.

Тогда $MB = DM = \sqrt{DK^2 + KM^2} = \sqrt{1/4 + 1/36} = \sqrt{10}/6$.

Пусть точка E — основание перпендикуляра, проведенного из M к плоскости DBC (рис. 17.15). Треугольники KEM и KPC подобны, поэтому $EM : PC = KM : CK$. Отсюда

$$EM = PC \cdot KM : CK = (0{,}5\sqrt{6} \cdot 1/6) : \sqrt{(0{,}5\sqrt{6})^2 + 1{,}5^2} =$$

$$= \sqrt{10} : 30.$$

Из прямоугольного треугольника DHB получаем

$$DH = DB\cos \angle HDB = DK : DM = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{10}}{6} = 3\sqrt{10} : 10.$$

Так как $\dfrac{\sqrt{10}}{6} = \left(\dfrac{3\sqrt{10}}{10} - \dfrac{\sqrt{10}}{6}\right) + \dfrac{\sqrt{10}}{30}$, то мы доказали, что точкой M для "хорошей" пирамиды $ABCD$ является ортоцентр треугольника DPB и $MD = \sqrt{10}/6$.

Итак, осталось выяснить, существует ли искомая точка M и для такой пирамиды $ABCD$, у которой угол между скрещивающимися прямыми DB и AC острый.

Допустим, что такая точка M есть. Обозначим: h_1, h_2, h_3 и h_4 — расстояния от M до плоскостей BCD, ACD, ABD, ABC соответственно; $S(ABD) = S(DBC) = s, S(ACD) = S(CAB) = 2s$; DH и BF — высоты пирамиды $ABCD$.

По условию задачи

$$DM + MB = h_1 + h_2 + h_3 + h_4. \tag{17.14}$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{3}h_1 s + \frac{1}{3}h_2 \cdot 2s + \frac{1}{3}h_3 s + \frac{1}{3}h_4 \cdot 2s = \frac{1}{3} DH \cdot 2s; \tag{17.15}$$

$$\frac{1}{3}h_1 s + \frac{1}{3}h_2 \cdot 2s + \frac{1}{3}h_3 s + \frac{1}{3}h_4 \cdot 2s = \frac{1}{3} BF \cdot 2s; \tag{17.16}$$

$$DM + h_4 \geqslant DH; \tag{17.17}$$

$$BM + h_2 \geqslant BF. \tag{17.18}$$

Из системы уравнений и неравенств (17.14) – (17.18) следует, что точка M является пересечением DH и BF пирамиды $ABCD$, т.е. прямые DB и CA взаимно перпендикулярны.

Всякую треугольную пирамиду можно разделить на две треугольные пирамиды, имеющие по две взаимно перпендикулярные грани. Поэтому решение всякого многогранника сводится к решению прямоугольных трехгранных углов. Нужно систематически показывать ученикам, как преобразовывать любую метрическую стереометрическую задачу в задачу о треугольной пирамиде с прямым двугранным углом.

З а д а ч а 8. Основанием пирамиды $DABC$ является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро DC перпендикулярно к плоскости основания и равно 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку D и середину M ребра BC, а другая — через точку C и середину K ребра AB (рис. 17.16).

Искомый угол равен углу PMD, поэтому задача сводится к решению прямоугольного трехгранного угла $MCPD$ (M — его вершина, CM — ребро прямого двугранного угла).

Длина отрезка CH равна расстоянию между скрещивающимися прямыми DM и CK, потому что прямая CK параллельна плоскости DPM. Очевидно, что $CM = 2\sqrt{2}$ и $MD = \sqrt{CD^2 + CM^2} = 2\sqrt{3}$. Поэтому $\cos\angle CMD = 2/3$ и $\cos\angle PMD = \cos\angle PMC \cos\angle CMD = \cos 30° \sqrt{2/3} = 0{,}5\sqrt{2}$, т.е. $\angle PMD = 45°$.

Применив формулу $\operatorname{tg}\beta = \sin\alpha \operatorname{tg} B$, получим: $\cos\angle DPC = \operatorname{tg}\angle CMP : \operatorname{tg}\angle PMD = \sqrt{3} : 3$; $\sin\angle DPC = \sqrt{1 - (\sqrt{3}/3)^2} = \sqrt{2/3}$; $CH = CP\sin\angle DPC = \sqrt{2}\sqrt{2}/\sqrt{3} = 2/\sqrt{3}$.

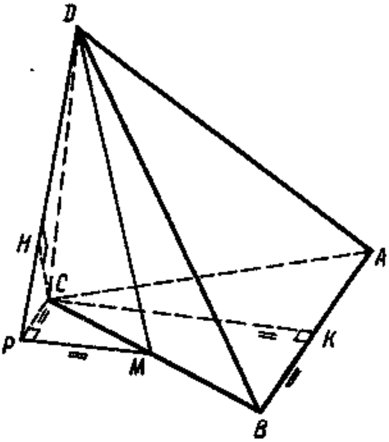


Рис. 17.16

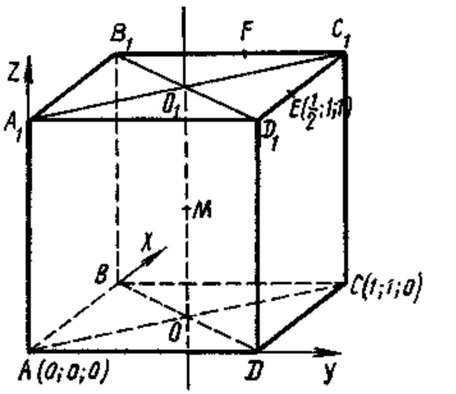


Рис. 17.17

Заканчивается решение любой стереометрической задачи проверкой.

Комплексное использование построений и вычислений упрощает поиск решений стереометрических задач и сокращает вычисления. При этом не следует забывать и о дополнительных построениях.

З а д а ч а 9. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 17.17), ребро которого равно 1. Через вершины A и C и середины F и E ребер B_1C_1 и C_1D_1 проведена сфера. Найти радиус R этой сферы.

Центр M сферы равноудален от точек A и C, поэтому он принадлежит плоскости симметрии этих точек, т.е. плоскости BDD_1. По той же причине точка M принадлежит и плоскости A_1C_1C (плоскости симметрии точек F и E). Итак, точка M принадлежит прямой OO_1, по которой пересекаются плоскости A_1C_1C и BDD_1.

Введем прямоугольную систему координат (рис. 17.17). Мы не знаем, где на прямой OO_1 находится точка M, поэтому $M(0{,}5;\ 0{,}5;\ z)$. Но $ME^2 = MC^2$, т.е. $(0{,}5-0{,}5)^2+(0{,}5-1)^2+(z-1)^2=(1-0{,}5)^2+(1-0{,}5)^2+(0-z)^2$. Отсюда $z = 3/8$ и $R^2 = MC^2 = (1-0{,}5)^2+(1-0{,}5)^2+(0-3/8)^2 = 41/64$, $R=\sqrt{41}/8$.

Для того чтобы выбрать наиболее рациональный план и метод решения стереометрической задачи, важно с самого начала разобраться, является данная задача аффинной или метрической.

З а д а ч а 10. $ABCA_1B_1C_1$ — произвольная треугольная призма. Точки P и K — середины ее ребер BB_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость APK делит призму на две части. Найти отношение объемов этих частей.

Построение сечения $APKM$ понятно из рис. 17.18. Этот рисунок можно считать изображением любой треугольной призмы. Поэтому ответ, полученный при рассмотрении какой-либо конкретной призмы $ABCA_1B_1C_1$, будет верным и для любой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Отсюда ясно, что рассматриваемая задача является аффинной.

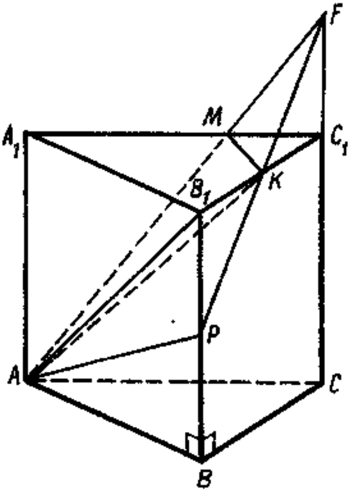


Рис. 17.18

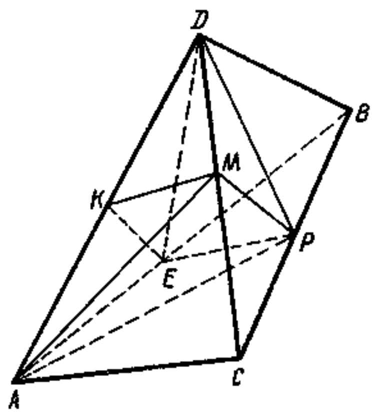


Рис. 17.19

Чтобы упростить вычисления, найдем искомое отношение для прямой треугольной призмы, у которой $AB = BC = AA_1 = 1$ и угол ABC прямой. Очевидно, что $FC_1 = B_1P = 0{,}5$. Из подобия треугольников FMC_1 и FAC имеем $MC_1 = 1/3$. Поэтому $S(A_1MKB_1) = S(A_1B_1C_1) - S(MKC_1) = 0{,}5 - 0{,}5 \times 0{,}5\ \frac{\sqrt{2}}{3}\sin 45^\circ = \frac{5}{12}$. Объем призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен $\frac{1}{2}$, $V(AA_1MKB_1) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{36}$, $V(AB_1KP) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$. Поэтому объем той части призмы, которая содержит вершину A_1, равен $\frac{5}{36} + \frac{1}{24} = \frac{13}{72}$. Объем второй части равен $\frac{1}{2} - \frac{13}{72} = \frac{23}{72}$.

Ответ. 13/23.

Задача 11. Фигура $DABC$ является треугольной пирамидой (рис. 17.19), $\overline{AK} = \overline{KD}$, $\overline{BP} = \overline{PC}$, $\overline{DM} = 0{,}4\overline{DC}$. Найти площадь S сечения пирамиды плоскостью KMP, если вершина A удалена от плоскости KMP на $h = 1$ и объем пирамиды $DABC$ равен 5.

Строим сечение пирамиды $DABC$ методом параллельных проекций. За направление проектирования выбираем прямую KP. В этом случае пирамида $DABC$ изображается параллелограммом $ABDC$ (рис. 17.20), а секущая плоскость — прямой KM, которая пересекает ребро AB в точке E. Точка $K = P$ является центром симметрии параллелограмма $ABDC$, поэтому $AE : EB = DM : MC = 2:3$.

Итак, сечением пирамиды $DABC$ плоскостью KMP является четырехугольник $KMPE$.

Четырехугольные пирамиды $AEKMP$ и $DEKMP$ имеют общее основание $KMPE$ и $AK = KD$, поэтому их объемы равны. Площадь треугольника AMD равна 0,4 площади треугольника ACD, а расстояние от точки P до плоскости

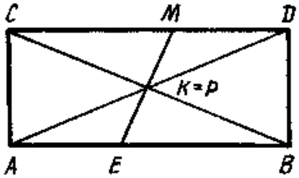


Рис. 17.20

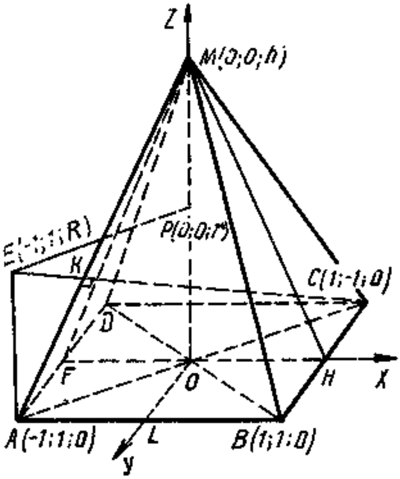


Рис. 17.21

ACD в два раза меньше расстояния от точки B до этой плоскости. Поэтому объемы пирамид $DBEP$ и $MAPC$ составляют от 0,3 объема пирамиды $DABC$. А это означает, что объем пирамиды $AKMPE$ равен 0,2 объема пирамиды $DABC$, т.е. равен 1. Итак, $Sh/3 = 1$, но $h = 1$, поэтому $S = 3$.

Задача 12. В правильную четырехугольную пирамиду $MABCD$ с вершиной M вписан шар. Второй шар касается первого шара, а также плоскости основания пирамиды в точке A. Через центр второго шара и сторону BC основания пирамиды проведена плоскость, пересекающая ребро MA в точке K. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания пирамиды, если известно, что ребро MA и диагональ CK сечения взаимно перпендикулярны.

Изображаем фигуры, о которых говорится в задаче (рис. 17.21). Пусть $AB = 2$, а высота $MO = h$. Пусть основание высоты пирамиды (точка O) является началом прямоугольной системы координат $(x;\ y;\ z)$. Положительное направление осей координат показано на рис. 17.21 ($\overline{BH} = \overline{HC}, \overline{AL} = \overline{LB}$). Тогда $M(0;\ 0;\ h)$, $A(-1;\ 1;\ 0)$, $C(1;\ -1;\ 0)$. Пусть P — центр вписанного в пирамиду $MABCD$ шара. Допустим, что его радиус равен r. Тогда $P(0;\ 0;\ z)$. Пусть E — центр второго шара. Обозначим его радиус R. Очевидно, что $E(-1;\ 1;\ R)$.

Приступаем к составлению уравнений по условию задачи. Вписанный в пирамиду $MABCD$ шар касается сторон равнобедренного треугольника MFH (F — середина отрезка AD). Воспользовавшись зависимостью между площадью S треугольника MFH, его полупериметром p и радиусом r ($S = pr$), получаем:

$$0{,}5FH\cdot OM = (FO + FM)r \quad \text{или} \quad 0{,}5\cdot 2h = (1 + \sqrt{1+h^2})r.$$

Отсюда

$$h = r(1 + \sqrt{1+h^2}). \tag{17.19}$$

Применим метод координат для выражения условия, что рассматриваемые шары касаются внешним образом:

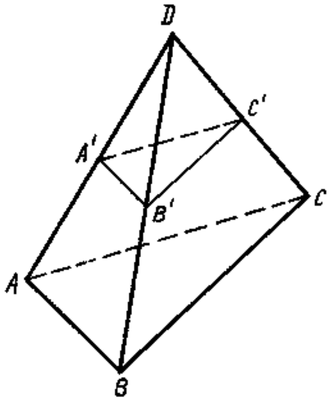


Рис. 17.22

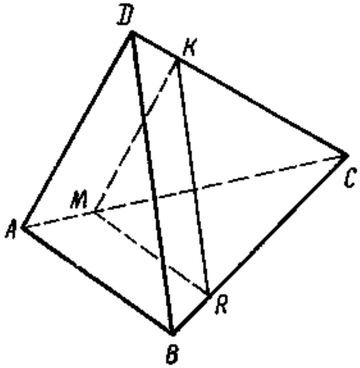


Рис. 17.23

$$EP^2 = (R + r)^2 \quad \text{или} \quad (0 + 1)^2 + (0 - 1)^2 + (r - R)^2 = (R + r)^2.$$

Отсюда

$$2rR = 1. \qquad (17.20)$$

Прямые CE и AM взаимно перпендикулярны. Поэтому $\overline{CE} \cdot \overline{AM} = 0$ или

$$(-2;\ 2;\ R)\ (1;\ -1;\ h) = 0;\quad Rh = 4. \qquad (17.21)$$

Из уравнений (17.20) и (17.21) имеем:

$$r = h/8. \qquad (17.22)$$

Из уравнений (17.19) и (17.22) находим $h = 4\sqrt{3}.$

Для определения величины φ двугранного угла между плоскостями ABC и BCK рассмотрим прямоугольный трехгранный угол $CKAB$. У него $\angle ACB = 45°$ и $\angle KCA = 90° - \angle MAC$. Так как $\operatorname{tg} \angle MAC = MO : AO = h : \sqrt{2} = 4\sqrt{3} : \sqrt{2} = 2\sqrt{6}$, то $\operatorname{tg} \angle KCA = 1/(2\sqrt{6})$.

Применив формулу $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\gamma \cos B$, найдем $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}/6$.

З а д а ч а 13. Доказать, что периметр любого сечения треугольной пирамиды $DABC$ плоскостью не превосходит наибольшего из периметров его граней.

Пусть грань ABC имеет наибольший периметр.

Если сечение $A'B'C'$ параллельно плоскости ABC (рис. 17.22), утверждение задачи очевидно.

Утверждение задачи также очевидно и в том случае, если сечение MKE параллельно одной из боковых граней пирамиды (рис. 17.23).

Пусть секущая плоскость проходит через вершины A и B пирамиды и произвольную точку X ребра DC (рис. 17.24). Утверждение задачи верно, так как отрезок AX принадлежит треугольнику ACD, а отрезок BX находится внутри треугольника CBD (см. также рис. 17.25–17.27, на которых показаны развертки боковой поверхности пирамиды $DABC$). Итак, периметр треугольника ABX меньше периметра треугольника ABC и больше периметра треугольника ABD.

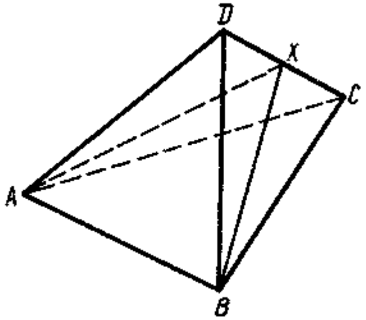


Рис. 17.24

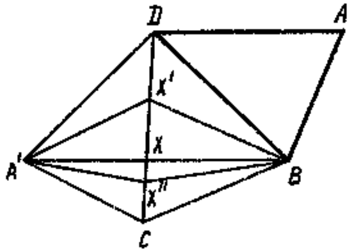


Рис. 17.25

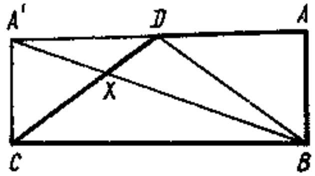


Рис. 17.26

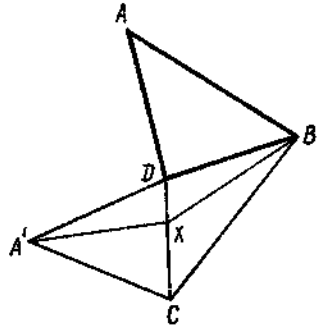


Рис. 17.27

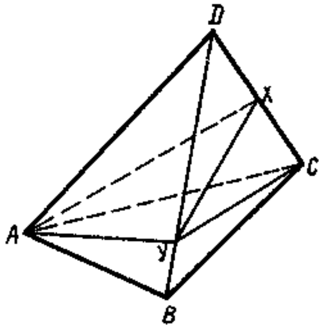


Рис. 17.28

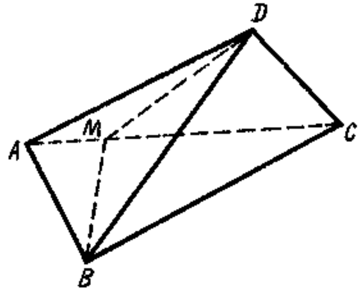


Рис. 17. 29

Пусть сечением пирамиды является треугольник AYX (рис. 17.28). Справедливость утверждения задачи следует из предыдущего случая.

Если сечением является треугольник MBD (рис. 17.29), утверждение задачи доказывается так же, как и для случая, показанного на рис. 17.24. К этому рассуждению сводится и рассмотрение варианта, изображенного на рис. 17.30.

Пусть сечением пирамиды $DABC$ является параллелограмм $MKEF$ (рис. 17.31). Обозначим $DC = 1$ и $DK = x$. Тогда $MK = FE = xAC$, $KE = MF = (1 - x)DB$ и $P(MKEF) = 2xAC + 2(1-x)DB = f(x)$.

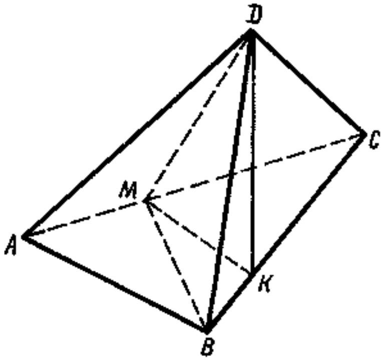


Рис. 17.30

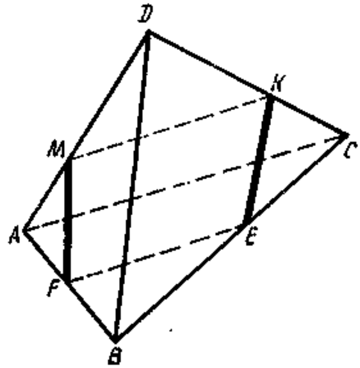


Рис. 17.31

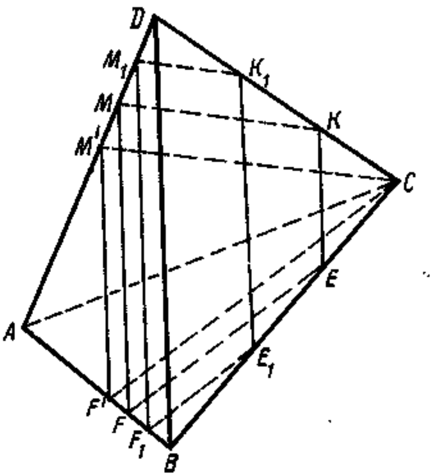


Рис. 17.32

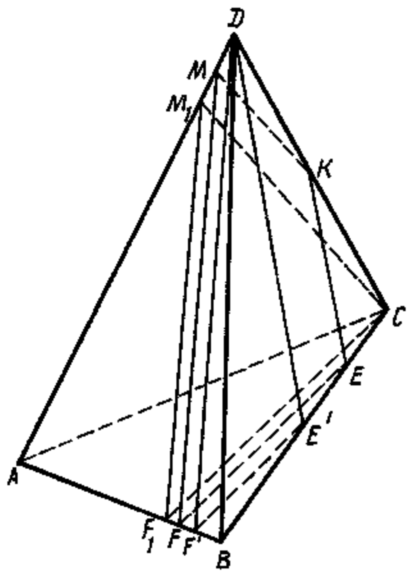


Рис. 17.33

Функция $f(x)$ линейная. Она определена на интервале $(0;\ 1)$. Наименьшего и наибольшего значений она достигает на концах промежутка определения. Поэтому $2DB < f(x) < 2AC$. Но $2AC < P(ABC)$ и $2DB < P(DBC) < P(ABC)$.

Пусть сечением пирамиды $DABC$ является трапеция $MKEF$ (рис. 17.32). При движении точки K по ребру DC периметр P сечения $MKEF$ изменяется линейно. Поэтому в этом случае для обоснования утверждения задачи используются рассуждения, изложенные выше.

Пусть, наконец, сечением пирамиды $DABC$ является произвольный четырехугольник $MKEF$ (рис. 17.33). И в этом случае для доказательства утверждения задачи используется линейное изменение периметра четырехугольника $MKEF$, если точка K движется по ребру DC.

17.5. Основные стереометрические задачи и формулы

Под основными стереометрическими задачами понимаются те, к решению которых сводится так или иначе любая трехмерная задача: построение основания H высоты DH пирамиды $DABC$ (на модели, развертке, проекционном чертеже, рис. 17.34); построение линейного угла двугранного угла на его изображении; построение угла прямой с плоскостью (на модели и на проекционном чертеже); построение основания перпендикуляра, проведенного из точки к прямой (на проекционном чертеже); вычисление расстояния от точки до прямой и плоскости, а также между двумя параллельными плоскостями; вычисление расстояния между двумя скрещивающимися прямыми (эта задача сводится к определению расстояния между двумя параллельными плоскостями, каждая из которых проходит через одну из этих скрещивающихся прямых); нахождение величин углов, двугранных углов и угла наклона прямой к плоскости; решение прямоугольных трехгранных углов; построение центра сферы, описанной вокруг треугольной пирамиды; изображение стереометрических фигур в соответствии с их свойствами.

Основные стереометрические формулы: формулы объемов и площадей поверхностей многогранников и фигур вращения (программные); зависимость между площадью многоугольника и его ортогональной проекцией на плоскость.

Дополнительные формулы:

а) $V = \dfrac{1}{3} Sr$ (V — объем многогранника; S — площадь его полной поверхности; r — радиус вписанного в многогранник шара);

б) $V = \dfrac{a+b+c}{3} S$ (V — объем многогранника, который является частью треугольной призмы $ABCA'B'C_1$ (рис. 17.35); S — площадь треугольника HKM, т.е. площадь ортогонального сечения призмы $ABCA'B'C_1$, $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$). Эта формула верна и в том случае, если a, b или c равно нулю;

в) $V = \dfrac{abh}{6}\sin\varphi$ (V — объем треугольной пирамиды; a и b — длины ее скрещивающихся ребер; φ — угол между этими ребрами; h — расстояние между ними).

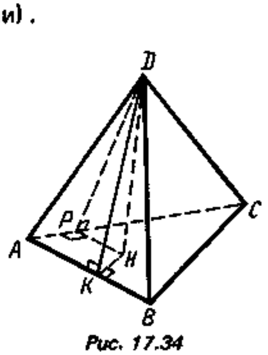


Рис. 17.34

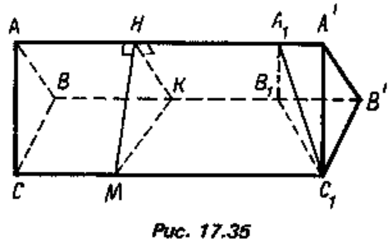


Рис. 17.35

З а д а ч а. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через вершину A и середины M и K_1 ребер BB_1 и B_1C_1 проведено сечение. Найти отношение объемов частей, на которые сечение разделило призму.

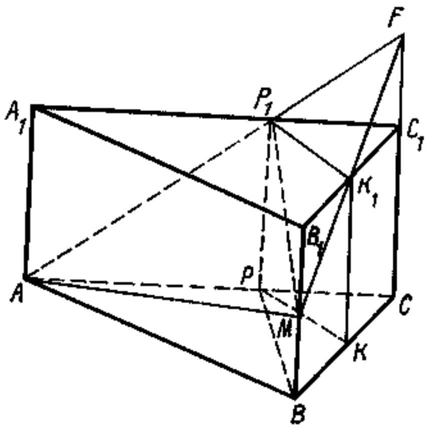


Рис. 17.36

Построение сечения понятно из рис. 17.36. Пусть $S(ABC) = Q, AA_1 = 1$. Треугольники K_1B_1M и K_1C_1F равны, поэтому $FC_1 = 0{,}5$. Далее, $P_1C_1 : AC = FC_1 : FC = 1:3$.

Разделим ту часть Π_1 призмы, которая содержит вершину C, плоскостями на три части следующим образом: через точки P_1 и K_1 проведем плоскость, параллельную прямой CC_1 (в сечении получим параллелограмм P_1K_1KP); через точки P_1 и M проведем плоскость, параллельную ребру CC_1.

При вычислении объемов выпуклых многогранников $APBP_1B_1$, $PBKP_1MK_1$ и $PKCP_1K_1C_1$ используем формулу $V = \frac{1}{3}(a+b+c)\,Q$:

$$V(PKCP_1K_1C_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}Q\cdot 1 = \frac{Q}{6};\quad V(PBKP_1MK_1) = \frac{1+0{,}5+1}{3}\cdot\frac{Q}{6} = \frac{5Q}{36};\quad V(APBP_1M_1) = \frac{0+0{,}5+1}{3}\cdot\frac{2Q}{3} = \frac{Q}{3};\quad V(\Pi_1) = \frac{Q}{6} + \frac{5Q}{36} + \frac{Q}{3} = \frac{23Q}{36}.$$

Объем второй части призмы равен $\frac{13Q}{36}$.

Ответ. 13/23.

17.6. Задачи для повторения стереометрии

Задачи для повторения стереометрии имеют ряд особенностей. Во-первых, в каждой из них рассматриваются свойства одной какой-либо геометрической фигуры (или группы фигур одного вида). Это позволяет сократить работу по выполнению чертежей, более глубоко изучить связи между отдельными элементами пространственных фигур. Во-вторых, комплексный характер таких задач определяется тем, что они содержат устные вопросы, задания на чтение чертежей, доказательство, вычисление и построение. При этом широко используются и готовые чертежи.

З а д а ч а 1. Основанием четырехугольной пирамиды $MABCD$ является прямоугольник $ABCD$, у которого $AB = 2$, $BC = 4$. Боковая грань CMD — правильный треугольник, его плоскость перпендикулярна к плоскости основания пирамиды. Построить

1) сечение пирамиды плоскостью, которая проходит через:

а) ребро CB и перпендикулярна к плоскости ADM;

б) ребро CD и делит пополам угол MCB;

в) ребро BM и образует двугранный угол 45° с плоскостью основания пирамиды;

г) вершину C и перпендикулярна к прямой BM;

д) вершину B и перпендикулярна к плоскостям ADM и DMC;

е) вершину C, перпендикулярна к плоскости грани $ABCD$ и одинаково наклонена к прямым CD и CB;

ж) вершину C, перпендикулярна к плоскости CDM и одинаково наклонена к прямым CM и CD;

2) отрезок, по которому пересекаются сечения, описанные в пп. 6 и 7. Доказать, что этот отрезок образует одинаковые углы со всеми ребрами пирамиды, которые выходят из вершины C.

Эти задачи должны быть комплексными еще и в следующем смысле: во-первых, описанная в задаче пространственная фигура всесторонне изучается как геометрический объект; во-вторых, полученные в процессе решения алгебраические и тригонометрические выражения исследуются средствами математического анализа, т.е. осуществляется взаимосвязь между различными разделами школьной математики.

З а д а ч а 2. Равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC = 1$, $\angle BAC = \alpha$) служит основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$. Угол BA_1C равен β. Найти: радиус сферы, описанной вокруг призмы; площадь полной поверхности призмы; объем призмы; при какой зависимости между α и β в призму вписывается сфера; условие, при котором объем призмы будет равен площади ее полной поверхности.

Как изменяется объем призмы с изменением углов α и β?

17.7. Применение разверток

Развертки многогранников и фигур вращения используются для уяснения содержания задачи (в комплексе с моделями и проекционным чертежом).

Часто развертка применяется и как метод решения стереометрических и планиметрических задач.

З а д а ч а 1. В треугольной пирамиде $DABC$ боковые ребра равны a. Плоские углы при вершине D равны α, β, φ. Через точку A проходят плоскости, пересекающие все боковые ребра. Найти наименьшее значение периметров сечений (рис. 17.37).

Строим развертку боковой поверхности пирамиды $DABC$ (рис. 17.38–17.40). Очевидно, что ответом будет длина отрезка $AA' = 2a\sin\frac{\alpha+\beta+\varphi}{2}$ (если $\alpha + \beta + \varphi < 180°$; в остальных случаях наименьший периметр не существует).

З а д а ч а 2. На рис. 17.41 даны плоский угол AOB и внутри его точка M. На его сторонах OA и OB построить такие точки K и H, чтобы периметр треугольника KMH был наименьшим.

Рис. 17.41 можно считать изображением вырожденного угла $OABM$ (с вершиной O). Строим его развертку. Дальнейшие построения понятны из рисунка.

Развертку можно использовать и как средство развития пространственного воображения учащихся.

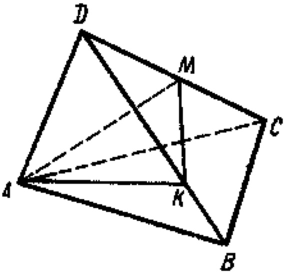


Рис. 17.37

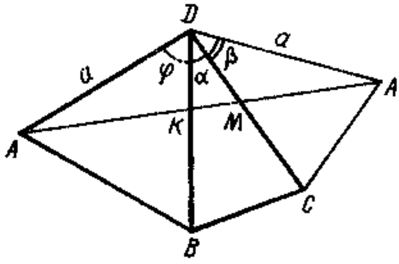


Рис. 17.38

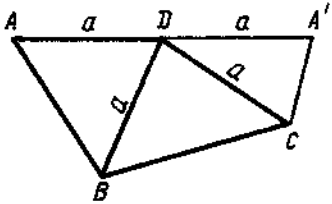


Рис. 17.39

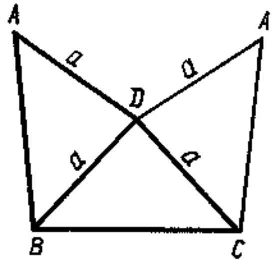


Рис. 17.40

17.8. Готовые чертежи

Готовые чертежи позволяют экономить время при комплексном изучении свойств пространственных фигур, особенно при повторении учебного материала. Они дают возможность организовать фронтальную работу по развитию пространственного воображения и функционального мышления учащихся.

З а д а ч а 1. На рис. 17.42 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 6. Кроме того, $\overline{AK} = \overline{KB}, \overline{A_1K_1} = \overline{K_1B_1}$. Плоскость α вращается вокруг прямой KD. На рисунке показаны различные многоугольники, которые образуются при пересечении куба плоскостью α: треугольники XKD, $X'KD$, четырехугольники $FLDK$, D_1K_1KD, B_1RDK, пятиугольник $EMTDK$, четырехугольники NC_1DK, $KHPD$.

Составить план построения сечения куба плоскостями FKD (точка F принадлежит отрезку A_1K_1) , K_1KD, B_1KD, MKD (точка M принадлежит ребру B_1C_1) , KDC_1, PDK (точка P принадлежит ребру CC_1) .

Если плоскость α пересекает ребро AA_1 (в точке X) , то в сечении ее с кубом получаем треугольники. Существует ли среди этих треугольников равнобедренный? Как изменяется величина углов треугольника XKD , если длина отрезка AX увеличивается? Существует ли такое положение точки F на отрезке A_1K_1, при котором трапеция $FLDK$ является равнобочной? Есть ли среди изображенных на рис. 17.42 сечений ромбы, прямоугольники, квадраты, параллелограммы? Сравнить площади сечений $KHPD$ и KNC_1D .

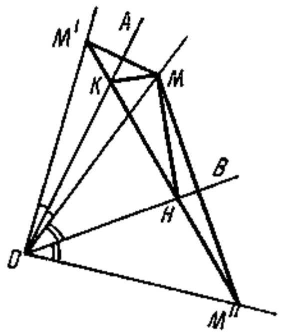


Рис. 17.41

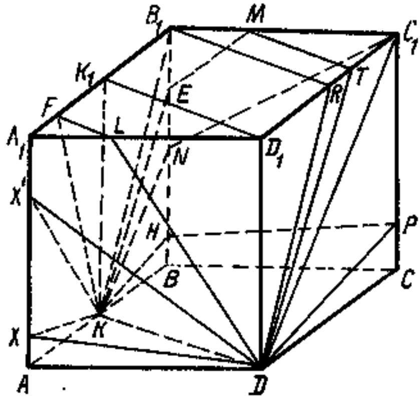


Рис. 17.42

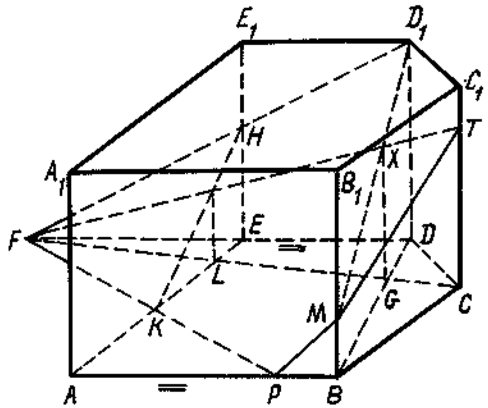


Рис. 17.43

Сравнить площади сечений K_1KDD_1 и B_1RDK.

Задача 2. Фигура $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ является пятиугольной призмой (рис. 17.43); $PKHD_1TM$ — ее сечение плоскостью α. Составить план построения сечения, если α задана точками: 1) D_1, H, P; 2) M, K, D_1; 3) D_1, M, P; 4) F, H, M; 5) D_1, T, M; 6) K, T, M; 7) F, K, H.

17.9. Задания по составлению плана решения стереометрических задач на готовом чертеже

Задания по составлению плана решения стереометрических задач на готовом чертеже дают возможность вести систематическую работу по развитию математического мышления каждого учащегося, вырабатывать навыки применения изученного материала в новых ситуациях, развивать комбинаторные способности и пространственное воображение.

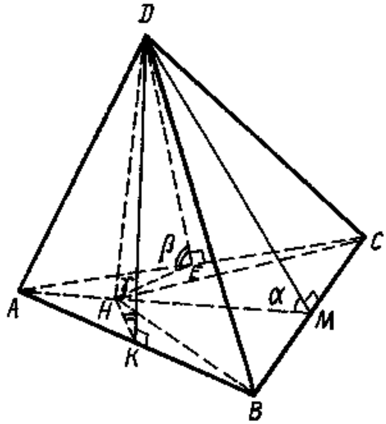


Рис. 17.44

На рис. 17.44 изображена треугольная пирамида $DABC$. Точка H – основание ее высоты DH. Обозначения различных углов показаны на рисунке. Составить план решения следующих задач:

1) дано: $S\,(ABC) = 5$, $AD = 2$, $\angle\ DAC = 60°$, $\angle\ CAH = 30°$. Найти объем пирамиды $DABC$;

2) дано: $\angle\ DAC = \angle\ DAB = 60°$, $\angle\ CAB = 90°$. Найти двугранный угол при ребре AD;

3) дано: $AB = BC = AC = 1$, $\beta = \gamma = 30°$, $\alpha = 60°$. Найти длину высоты DH пирамиды;

4) дано: $AD = 1$, двугранный угол при ребре AD равен $60°$, $\angle\ DAC = \angle\ DAB = 60°$. Найти длину отрезка AH.

17.10. Вписанный и описанный шары

В школьной стереометрии значительное место занимают задачи на определение радиуса шара, вписанного в многогранник, и шара, описанного вокруг многогранника. Сформулируем основные свойства этих шаров.

Центр шара, вписанного в многогранник, есть пересечение биссекторных плоскостей всех его двугранных углов.

Между объемом V многогранника, площадью S его поверхности и радиусом r вписанного шара существует следующая зависимость: $3V = Sr$.

Положение центра O шара, описанного вокруг многогранника, может быть определено одним из следующих способов:

а) точка O есть пересечение двух прямых, которые проходят через центры кругов, описанных вокруг непараллельных граней многогранников, и перпендикулярны к ним;

б) точка O есть пересечение трех плоскостей, которые проходят через середины непараллельных ребер многогранника и перпендикулярны к этим ребрам;

в) точка O есть пересечение прямой, которая проходит через центр круга, описанного вокруг одной из граней, и перпендикулярна к плоскости ω этого

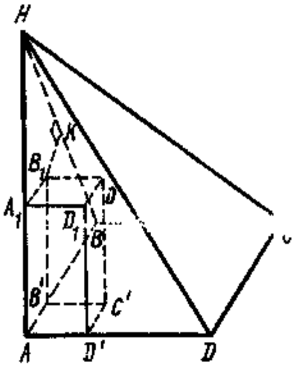


Рис. 17.45

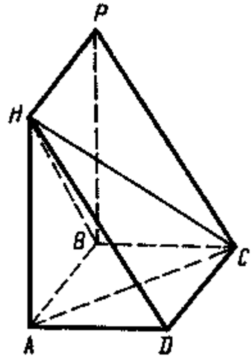


Рис. 17.46

круга и к плоскости, которая проходит через середину ребра, не параллельного плоскости ω, и перпендикулярна к этому ребру.

Сфера определяется четырьмя некомпланарными точками. Поэтому решение всякой задачи на вычисление радиуса описанного вокруг многогранника шара состоит из доказательства, что он вписывается в шар, и вычисления радиуса сферы, описанной вокруг какой-нибудь треугольной пирамиды, вершинами которой являются вершины данного многогранника.

З а д а ч а. Основание пирамиды $HABCD$ — квадрат $ABCD$, ребро HA перпендикулярно к плоскости основания, $AB = 3$, $HA = 4$. Доказать, что в пирамиду можно вписать сферу, и найти радиус этой сферы.

Приведем два решения этой задачи.

1. Сначала найдем радиус сферы. Потом докажем ее существование. Для этого применим формулу $3V = Sr$. Очевидно, что $V = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 3\cdot 4 = 12$, $HB = 5$, $S(ABCD) = 9$, $S(BAH) = S(HAD) = 0{,}5\cdot 3\cdot 4 = 6$, $S(HBC) = S(HDC) = 0{,}5\cdot 3\cdot 5 = 7{,}5$. Поэтому $S = 9 + 2\cdot 6 + 2\cdot 7{,}5 = 36$. Получаем $r = 1$.

Плоскости ABH, AHD и ABD взаимно перпендикулярны. Поэтому точка O, отстоящая на 1 от этих плоскостей, есть вершина куба $AB'C'D'A_1B_1OD_1$ (рис. 17.45). Докажем, что точка O отстоит на 1 от плоскостей HBC и HDC.

Так как прямая B_1O параллельна прямой BC, то расстояние от точек B_1 и O до плоскости HBC одинаково. Плоскости ABH и BHC взаимно перпендикулярны. Поэтому расстояние от точки B_1 до плоскости HBC равно расстоянию от B_1 до прямой BH. Таким образом, задача свелась к доказательству того, что точка B_1 есть центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник HAB.

Так как площадь треугольника AHB и его полупериметр равны 6, то радиус вписанного в него круга равен 1.

2. Дополним данную пирамиду $HABCD$ до прямой треугольной призмы $HADPBC$ (рис. 17.46). Прямоугольный треугольник HAD является ортогональным сечением этой призмы. Поэтому радиус шара ω, который касается плоскостей HAB, ABD, HDC и HAD, равен радиусу r круга, вписанного в треугольник HAD.

Мы уже знаем, что $r = 1$. Очевидно, что центр O шара ω находится внутри пирамиды $HABCD$. Поэтому шар ω касается граней $ABCD$, HAB, HAD и HCD этой пирамиды. Плоскость HAC является плоскостью симметрии пирамиды $HABCD$. Поэтому шар ω касается и грани HBC, симметричной грани HDC относительно плоскости HAC.

Если основанием четырехугольной пирамиды $HABCD$ является не параллелограмм, то аналогичная задача решается достаточно просто путем дополнения этой пирамиды до треугольной пирамиды.

17.11. Исследование решений задач

Решение задачи, содержащей параметры, заключается не только в том, чтобы найти величину искомого элемента геометрической фигуры, но и в установлении тех значений параметров, при которых она имеет решение.

Обычно исследование решения проводится после получения ответа на вопрос задачи (по формуле, выражающей зависимость между данными и искомыми элементами фигуры). Однако часто целесообразнее сначала определить допустимые значения параметров, а потом заняться вычислениями. Такой подход не только упрощает само исследование, но и позволяет найти более рациональное решение, избежать возможных ошибок при установлении допустимых значений параметров.

З а д а ч а . Основанием треугольной пирамиды $DABC$ является равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = AC$, $BC = a$, $\angle BAC = 2\alpha$. Все боковые ребра пирамиды равны между собой, $\angle DAC = \beta$. Определить длину ребра AD.

Боковые ребра пирамиды равны, поэтому основанием высоты этой пирамиды является центр O окружности, описанной вокруг треугольника ABC (рис. 17.47). Треугольник ABC равнобедренный. Следовательно, точка O принадлежит лучу AM (M — середина ребра BC). Угол OAC является ортогональной проекцией угла DAC на плоскость ABC. Угол DAC острый, так как треугольник ADC равнобедренный. Угол OAC также острый. Поэтому пирамида $DABC$, о которой говорится в задаче, существует только в том случае, если углы α и β острые и $\beta > \alpha$.

Обозначим $\angle DAO = x$. Из прямоугольного треугольника AOD имеем $AD = AO : \cos x$. Отрезок AO равен радиусу окружности, описанной вокруг треугольника ABC, поэтому $AO = BC : (2\sin 2\alpha) = a : (2\sin 2\alpha)$. Угол x найдем из прямоугольного трехгранного угла $AODC$: $\cos\beta = \cos\alpha \cos x$, $\cos x = \cos\beta : \cos\alpha$. Таким образом,

$$AD = AO : \cos x = \frac{a\cos\alpha}{2\sin 2\alpha\cos\beta} = \frac{a}{4\sin\alpha\cos\beta}.$$

Так как для острых углов α и β дробь $\frac{a}{4\sin\alpha\cos\beta}$ положительна, то многие из решающих эту задачу считают, что никакие дополнительные ограничения на углы α и β не полагаются. Предварительно выполненное исследование позволяет избежать этой ошибки.

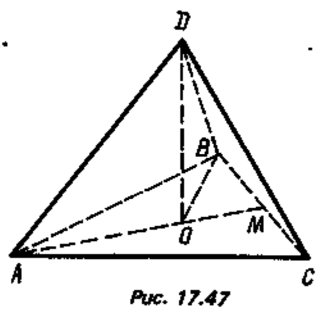


Рис. 17.47

18. ПРОБЛЕМЫ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ СИСТЕМ УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

18.1. Основные положения

Учебные задачи являются важнейшим средством формирования у школьников системы основных математических знаний, умений и навыков, ведущей формой учебной деятельности в процессе изучения математики, средством их математического развития. Решая математические задачи, представленные в продуманной методической системе, учащиеся не только активно усваивают курс математики, но и приобретают умение мыслить творчески.

Под методической системой математических задач (упражнений) понимают множество задач, находящихся в заданных отношениях и связях друг с другом, образующих определенную целостность и единство и предназначенных для решения заданной учебной цели.

Проблемы оптимизации методических систем задач школьного курса математики и систем задач в учебниках всегда находились в центре внимания педагогов-математиков. Если в учебнике (или в методическом руководстве для учителя) каждое упражнение содержательно, стоит на своем месте; если чрез систему упражнений обеспечивается усвоение не только теоретического материала, но и методов поиска решений нестандартных задач, то проблему оптимизации обучения и воспитания учащихся в процессе изучения математики сможет решить каждый учитель. Только при наличии оптимальной методической системы задач уроки математики будут эффективны.

Ведущими функциями математических задач являются обучающие, воспитывающие и развивающие. Каждая из этих функций взаимосвязана с другими, и искусство учителя состоит в том, чтобы в нужный момент одну из них реализовать в первую очередь. А для этого необходимо отказаться от стандартизации содержания и методов решения задач; совершенствовать методику обучения учащихся поиску решения задач; учить школьников анализировать, обобщать, высказывать правдоподобные математические гипотезы и т.д.

В настоящей главе рассматриваются только некоторые проблемы оптимизации методических систем математических задач, показываются конкретные пути и средства повышения эффективности использования задач в процессе изучения арифметики, алгебры, начал анализа и геометрии в школе.

18.2. Задачи на построение и вычисление

Геометрические задачи традиционно делят на задачи на вычисление, построение, доказательство. Однако такое деление обедняет обучающие функции задач. При этом искусственно изолируются конструктивные и аналитические методы их решения, не в полной мере реализуется принцип политехнизма в процессе обучения школьников математике. Рассмотрим три задачи.

З а д а ч а 1. Построить трапецию $ABCD$, зная ее четыре стороны.

З а д а ч а 2. Вычислить площадь трапеции $ABCD$ (стороны AB и CD — ее основания), если $AB = 23$ см, $BC = 12$ см, $CD = 10$ см, $DA = 5$ см.

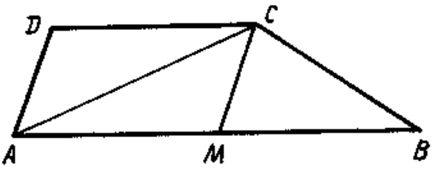


Рис. 18.1

З а д а ч а 3. В трапеции $ABCD$ (AB и CD – ее основания) $AB = 23$ см, $BC = 12$ см, $CD = 10$ см, $DA = 5$ см. Построить эту трапецию и найти ее площадь.

Первая задача обычно решается методом параллельного переноса. Вторая задача считается задачей повышенной трудности. В самом деле, ученик, привыкший находить площадь трапеции по формуле $S = 0{,}5\ (a + b)h$ (a и b – основания трапеции, h – ее высота), часто не может справиться с необычной для него ситуацией.

Третья задача – это не простое объединение первых двух задач. Аккуратно выполненные построения позволяют высказать гипотезу, что вспомогательный треугольник MCB является прямоугольным (рис. 18.1). Теорема, обратная теореме Пифагора, подтверждает эту гипотезу. А так как $S\ (AMC) : S\ (MCB) =$

$$= 10:13, \text{ то } S\ (ABCD) = 2S\ (AMC) + S\ (MCB) = \frac{33}{13}\ S\ (MCB) = \frac{33}{13}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,12 =$$

$$= 76\ \frac{2}{13}\ (\text{см}^2).$$

Наконец, аккуратно выполненный чертеж позволяет проверить полученный результат с помощью измерений, применяя правила приближенных вычислений.

Комплексное использование построений и вычислений особенно эффективно при решении сложных стереометрических задач. Это позволяет убедить учащихся в необходимости и полезности аккуратных инструментальных построений при решении стереометрических задач, в том, что комплексное использование аналитических и конструктивных методов существенно упрощает вычисления.

18.3. Построение системы задач по одному чертежу

Среди многих видов наглядных пособий, которые используются при изучении математики, особое место занимают такие чертежи, по которым можно ставить устные и полуписьменные задания при изучении многих разделов алгебры, начал анализа, геометрии.

Многие устные конструктивные задачи можно поставить по рис. 18.2, на котором изображен прямоугольник, разделенный на квадраты. Длина стороны каждого квадрата равна единице. Оси абсцисс и ординат можно располагать так, чтобы им принадлежали стороны квадратов. Приведем примеры таких устных упражнений на построение.

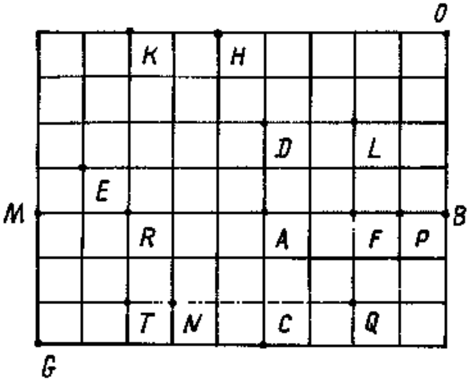


Рис. 18.2

Поместить начало координатных осей и выбрать их положительные направления так, чтобы:

1) модули абсцисс точек A и B были равны:
2) ординаты точек A и B были равны нулю;
3) сумма абсцисс точек A и B была равна нулю;
4) частное абсцисс точек A и B было отрицательным;
5) частное абсцисс точек K и H было равно -1;
6) частное ординат точек N и M было равно -2;
7) частное абсцисс точек N и T равнялось единице;
8) частное ординат точек M и G не существовало;
9) точки E и R имели одинаковые ординаты;
10) сумма ординат точек L и C была равна нулю;
11) точки K и H имели одинаковые ординаты;
12) точки K и H имели одинаковые абсциссы;
13) точки K и H имели одинаковые абсциссы и ординаты;
14) разность абсцисс точек A и B была отрицательной;
15) разность абсцисс точек A и B была равна нулю;
16) сумма абсцисс точек A и B была равна 4;
17) сумма абсцисс точек A и F была равна -6;
18) не существовала сумма абсцисс точек A и F;
19) сумма ординаты точки D и абсциссы точки F была равна нулю;
20) разность абсцисс точек A и B была положительной;
21) разность абсцисс точек P и F была наибольшей;
22) сумма ординат точек P и T была наибольшей;
23) сумма ординат точек T и M была наименьшей;
24) разность между абсциссами точек A и F была наименьшей;
25) произведение ординаты D и абсциссы точки F было равно 4;
26) разность ординат точек M и B была наибольшей;
27) разность ординат точек T и N была наименьшей;
28) произведение координат точки O было наименьшим;
29) разность абсцисс точек B и M была равна 8;
30) произведение абсцисс точек M и G не существовало;
31) абсцисса точки K была в три раза больше абсциссы точки P;

32) абсцисса точки K была меньше абсциссы точки D;

33) точка N находилась в первой координатной четверти, а точка A — во второй координатной четверти;

34) расстояние между точками P и T было равно ординате точки T;

35) расстояние между K и T было равно расстоянию между T и K;

36) расстояние между R и A было больше расстояния между A и C;

37) точки O и A были симметричны относительно начала координат;

38) сумма абсцисс точек P и B была больше двух;

39) точки O и A были симметричны относительно оси абсцисс;

40) произведение абсцисс точек N и T было наибольшим;

41) произведение абсцисс точек N и T было наименьшим;

42) произведение ординаты точки H и абсциссы точки R было наибольшим;

43) произведение абсцисс точек F, P и B было наибольшим;

44) сумма координат точки A была наибольшей;

45) произведение абсцисс точек F, P и B было наименьшим;

46) частное координат точки A было равно нулю;

47) произведение координат точек A, B и P было равно нулю;

48) точка D была симметрична самой себе относительно координатных осей;

49) сумма координат точек D, L, F и A была равна нулю;

50) точка O принадлежала биссектрисе третьего координатного угла;

51) точки O и B принадлежали биссектрисе третьего координатного угла;

52) точки N и K были равноудалены от оси абсцисс;

53) точки N и K были равноудалены от осей координат;

54) точки N и L были равноудалены от осей координат;

55) сумма абсцисс точек P и B была равна разности абсцисс этих точек;

56) разность абсцисс точек P и B была больше суммы абсцисс этих точек;

57) точки F и B были симметричны относительно оси абсцисс;

58) произведение абсцисс точек P и B было меньше расстояния между точками P и B;

59) расстояние между точками P и B было равно разности между абсциссами точек P и B;

60) произведение абсцисс точек P и B было равно частному абсцисс этих точек;

61) были равны между собой произведение, частное и разность координат точки A;

62) абсцисса точки A была равна полуразности расстояния между точками R и P;

63) ордината точки P была равна полусумме абсцисс точек A и B;

64) расстояние от точки D до оси ординат было равно ее абсциссе;

65) расстояние от D до отрезка FB было равно ординате точки D;

66) луч EK был графиком положительной функции;

67) графиком функции $y = \sqrt{-x^2}$ была точка E;

68) равенство $x + y = 0$ было уравнением прямой DF;

69) равенство $y = -x + 2$ было уравнением прямой DF;

70) объединение сторон угла ALB было графиком функции $y = -|x|$;

71) графиком уравнения $xy = 0$ было объединение прямых MB и CD;

72) прямая AF была графиком отрицательной функции;

73) графиком уравнения $y = -2$ была прямая AD;

74) объединение отрезков ME и ER было графиком неположительной функции;

75) графиком уравнения $|x + y| = 2$ было объединение прямых AQ и BL;

76) множество точек $\{K, R, T, N\}$ было графиком функции;

77) объединение лучей RM и TN было графиком некоторой функции;

78) объединение сторон угла RDF было графиком функции, не имеющей наименьшего значения;

79) объединение сторон угла RDF было графиком функции, не имеющей наибольшего значения;

80) прямая KD была графиком немонотонной функции;

81) прямая KD была графиком четной функции;

82) объединение сторон угла KDO было графиком четной функции;

83) прямая MF была графиком неубывающей нечетной функции;

84) координаты точек A, L и B были решением уравнения $y = -0{,}5x^2$;

85) координаты точек T, A и L были решением уравнения $y = -x$;

86) прямая AT была графиком обратимой функции;

87) прямая AT была графиком необратимой функции;

88) прямая DF была графиком данной функции и обратной ей;

89) прямая DH была графиком производной функции $y = -x^2$;

90) прямая AF была графиком производной возрастающей функции;

91) объединение отрезков MR и RT было графиком некоторой функции;

92) объединение отрезков PD, DL, LB не являлось графиком функции;

93) объединение отрезков PD, DL, LB было графиком положительной функции;

94) площадь прямоугольника $MGCA$ была равна сумме абсцисс F и P;

95) множество точек, обозначенных на рис. 18.2, было удалено от начала координат на единицу;

96) пересечение треугольников MRT и KRT было наиболее удалено от начала координат;

97) пересечение треугольников MRH и MRC было наименее удалено от начала координат;

98) длина высоты, проведенной на сторону MR треугольника MRC, была равна ординате точки R;

99) треугольник MPC принадлежал только двум координатным углам;

100) длина высоты треугольника RLB была равна абсциссе точки B;

101) площадь четырехугольника $DLBA$ была равна сумме координат точки P;

102) площадь треугольника ARD была равна абсциссе точки T;

103) площадь треугольника AFC была равна сумме координат точки P;

104) ордината вектора $\overline{AK}$ была равна -4, а его абсцисса 3;

105) координаты векторов $\overline{AL}$ и $\overline{NA}$ были одинаковы;

106) координаты вектора $\overline{DK}$ были равны координатам точки K;

107) $\overline{PM} = -8\overline{PB}$;

108) векторы $\overline{DA}$ и $\overline{AF}$ имели одинаковые координаты;

109) сумма координат вектора $\overline{DL}$ была равна нулю.

18.4. Познавательные задачи

Познавательными называют задачи, в процессе решения которых учащийся знакомится с новыми свойствами математических понятий, новыми (достаточно общими) методами решения задач. Значение таких задач трудно переоценить при подготовке класса к изучению новых теорем, их обобщению и конкретизации, при повторении ранее изученного материала.

Среди геометрических познавательных задач особенно ценны те, в которых рассматриваются геометрические места точек плоскости или пространства, так как благодаря им упрощаются решения многих сложных задач.

При подготовке к изучению новых теорем необходимо рассматривать такие задачи, в процессе решения которых ученики не только открывают новые свойства функций, фигур, чисел, уравнений, неравенств, но и усваивают сущность тех методов, при помощи которых эти свойства будут доказываться.

Например, перед введением понятия "параллелограмм" по школьному учебнику А.В. Погорелова и изучением его свойств целесообразно решить следующую задачу.

Постройте отрезок AC, разделите его точкой O пополам, проведите через эту точку произвольную прямую (не совпадающую с прямой AC) и на ней по разные стороны от точки O отложите равные отрезки OB и OD. Постройте отрезки AB, BC, CD, DA. С помощью угольника, масштабной линейки и транспортира найдите на чертеже равные и параллельные отрезки и равные углы. Назовите равные треугольники. Докажите обнаруженные свойства четырехугольника $ABCD$.

Решая эту задачу, ученики не только находят свойства параллелограмма, но и способы доказательства.

18.5. Устные задачи на построение

Предлагаемые ниже системы задач на построение и вычисление по готовым чертежам позволяют организовать комплексное повторение теоретического материала учащимися по многим разделам школьной планиметрии.

На рис. 18.3 изображены трапеция $ABCD$, параллелограммы $ABCE$ и $BCND$, диагонали AC и BD трапеции $ABCD$, ее средняя линия MK, средняя линия FP треугольника ACN и высота BH треугольника ABD. Построить трапецию $ABCD$, зная: 1) AB, BC, CD, AD; 2) $AB, AD, \angle BAD, \angle AOB$; 3) $AB, BH, MK, \angle BAC$; 4) $CD, \angle COD, BH, MK$; 5) $AC, BD, \angle COD, CD$; 6) AC, BD, BC, AD; 7) $AC, BD, \angle COD, \angle BAC$; 8) $AB, AD, AC, \angle BAD$; 9) $AC, \angle CAB, \angle ABC, \angle ADC$; 10) $AD, \angle CAD, \angle ADB, BC$; 11) $BD, AC, AD + BC, \angle BAD$; 12) $AC, AD - BC, \angle BAD, \angle ADC$.

Классу (или отдельным ученикам) называется номер задачи и предлагается составить устный план ее решения.

Готовый чертеж позволяет организовать обсуждение предлагаемых решений со всем классом. Обоснование планов различных решений является эф-

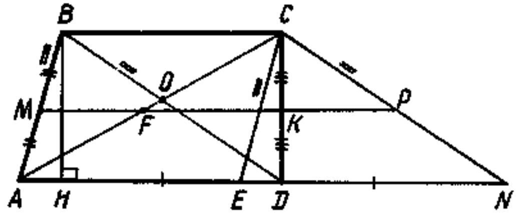


Рис. 18.3

фективной формой повторения основных свойств треугольников и четырехугольников.

18.6. Непрерывное движение в геометрии

Для развития пространственного воображения учащихся необходимо систематически решать задачи, в которых рассматриваются непрерывные изменения геометрических величин, формы фигур и их взаимное расположение.

Задание 1. На рис. 18.4 изображена правильная четырехугольная пирамида $MABCD$. Плоскость BDK перпендикулярна к прямой AM.

Как изменяются с увеличением высоты MO пирамиды ее боковые ребра; двугранный угол при ребре CD; угол наклона прямой AM к плоскости ABC; длина отрезка OK; двугранный угол при ребре AM; угол MCD?

Длина высоты MO пирамиды стремится к нулю. К чему при этом стремится двугранный угол при ребре CD; радиус вписанной в пирамиду сферы; радиус описанной вокруг пирамиды сферы?

Существует ли такое значение длины высоты пирамиды MO, при котором: двугранный угол при ребре AK прямой; угол BMC прямой; двугранный угол при ребре CM равен 30°; двугранный угол при ребре BM равен 120°; двугранный угол при ребре BC равен 30°?

Задание 2. На рис. 18.5 изображена правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AB = 1$, $AA_1 = 2$. Точки K, M, P, F принадлежат соответственно ребрам B_1C_1, AA_1, A_1D_1, C_1C.

1. При каком положении точек P и F (на соответствующих ребрах) прямые PF и B_1D пересекаются; параллельны; взаимно перпендикулярны?

2. Существует ли такое положение точек P, F, K и M, при котором прямые B_1D, PF и MK пересекаются в одной точке?

3. Чему равно наибольшее расстояние между точками M и F?

4. При каком условии прямые MK и PF взаимно перпендикулярны?

5. Существует ли такое положение точек M, K, P и F, при котором они являются вершинами правильного тетраэдра?

6. Чему равно наибольшее расстояние между прямыми PK и MF?

7. Составить устный план построения точки пересечения прямой B_1D с плоскостью MKP.

8. Существует ли такое положение точек K, P и M, при котором прямая B_1D параллельна плоскости MKP?

9. При каком условии отрезок MF прямой B_1D делится пополам?

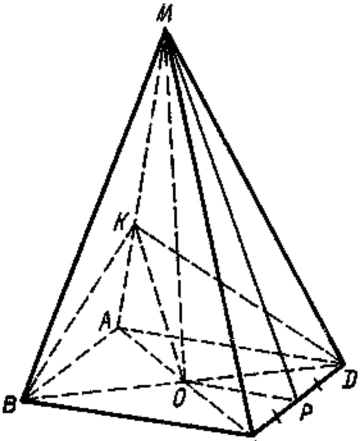


Рис. 18.4

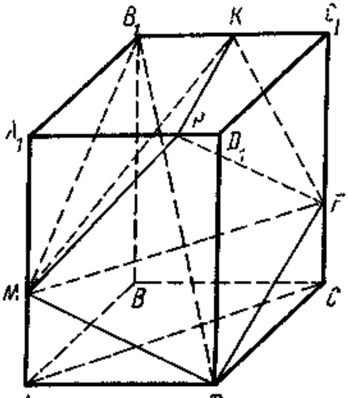


Рис. 18.5

10. При каком положении точек *M, F* и *P* прямые *MF* и *PD* взаимно перпендикулярны?

11. Существует ли такое положение точек *P, K, F* и *M,* при котором они принадлежат одной плоскости?

12. Чему равно наибольшее расстояние между точками *P* и *F*?

13. Существует ли такое положение точек *M, P* и *F*, при котором прямая *PF* параллельна прямой *DM*?

14. При каком условии точки *P, K, F* и *M* будут принадлежать одной плоскости и сечение призмы *PKF* будет прямоугольником?

19. ЗАДАЧИ КАК СРЕДСТВО ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

19.1. Обратная связь на уроках математики

Индивидуальный подход как принцип обучения и воспитания предполагает индивидуальный систематический учет знаний, умений, навыков учащихся на каждом уроке. К концу урока учителю надо знать, как усвоил каждый ученик новый материал. После этого можно определить объем домашнего задания.

Учителю математики на каждом уроке необходимо осуществлять оперативную эффективную обратную связь (ученик—учитель), с тем чтобы знать, как строить следующий урок, как на нем организовать работу с отдельными группами учащихся. Оперативная обратная связь нужна и для систематической проверки выполнения домашних заданий всеми учащимися класса.

В настоящее время, кроме традиционных способов контроля (устного опроса, проверки письменных работ и т.д.), находят применение различные дидактические материалы и технические средства обратной связи.

В этой главе описываются некоторые способы реализации обратной связи в обучении математике без использования технических средств. Каждый из рассматриваемых способов иллюстрируется большим числом примеров тестовых заданий, которые можно использовать как при изучении нового материала, так и при повторении.

19.2. Математические понятия, теоремы, функции, уравнения, неравенства

Усвоение учащимися математических понятий, содержания теорем, свойств функций можно быстро проверить с помощью соответствующих устных заданий.

З а д а н и е 1. На рис. 19.1 и 19.2 изображены графики функций:

$\psi_1(x) = (x+5)^3 - 3x - 15,\ x \in (-\infty;\ -3];$

$f(x) = x - 1, x \in (1;\ 5];$

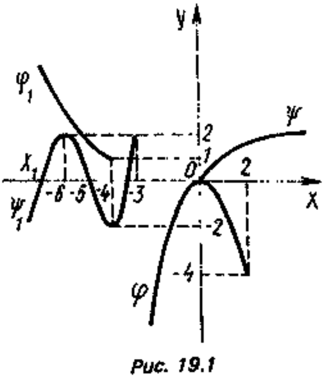


Рис. 19.1

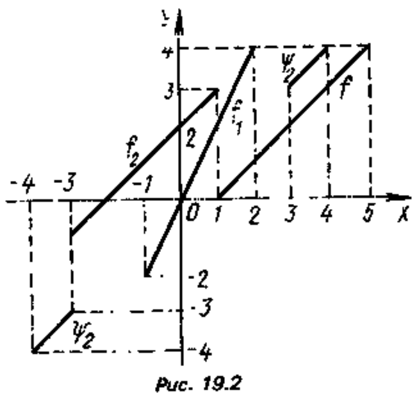


Рис. 19.2

$f_1(x) = 2x, x \in (-1;\ 2)$;

$f_2(x) = x + 2, x \in [-3;\ 1)$;

$\varphi(x) = -x^2,\ x \in (-\infty;\ 2]$;

$\varphi_1(x) = (x+4)^2 + 1,\ x \in (-\infty;\ -4]$;

$\psi(x) = \sqrt{x}$;

$\psi_2(x) = x, x \in [-4;\ -3] \cup (3;\ 4]$.

Записать номера верных утверждений.

1. Функция φ_1 убывающая.
2. Функция φ_1 положительная.
3. Функция φ_1 имеет наименьшее и наибольшее значения.
4. Функция ψ_2 нечетная.
5. Функция ψ_2 возрастающая.
6. Функция φ возрастающая.
7. Графики функций φ_1 и ψ совпадают.
8. График функции φ_1 можно перевести в график функции ψ поворотом вокруг некоторой точки.
9. График функции ψ можно перевести в график функции φ_1 параллельным переносом.
10. График функции ψ можно перевести в график функции φ_1 композицией параллельного переноса и поворота.
11. Функция f_1 нечетная.
12. $\Delta f_1(x) = 2\Delta x$.
13. $\Delta \psi(x) = 0{,}5\Delta x$.
14. $\Delta \varphi(x) = -2\Delta x$.
15. Функция φ_1 в точке -4 непрерывна.
16. Функция ψ в точке 0 непрерывна.
17. Функция f_2 в точке 1 непрерывна.
18. Функция f_2 в точке -3 непрерывна.
19. Функция f_2 в точке -2 непрерывна.
20. Функция ψ_2 непрерывна в каждой точке области ее определения.
21. Функция f_1 непрерывна в каждой точке области ее определения.
22. График функции φ симметричен относительно начала координат.
23. Функция ψ_2 имеет предел в точке 3.
24. Функция ψ_2 имеет предел в каждой точке области ее определения.
25. Предел функции f_2 в точке 1 равен 3.
26. Предел функции f в точке 5 равен 4.
27. Предел функции ψ_1 в точке -3 равен пределу функции f_2 в точке 0.
28. $\lim\limits_{x \to -4} \varphi_1(x) > \lim\limits_{x \to -4} \psi_1(x)$.
29. Предел функции ψ_2 в точке 3 равен 3.

30. $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{\psi_2(x)}{f(x)} = 1{,}5.$

31. Производная функции φ в точке 0 равна нулю.

32. Функция ψ_2 дифференцируема в каждой точке области ее определения.

33. Функция f_1 дифференцируема в каждой точке области ее определения.

34. Производная функции ψ' в точке 0 равна нулю.

35. $\varphi_1'(-4) = 0.$

36. $\psi_1'(-6) = \psi_1'(-3) = 0.$

37. Графики функций f_2 и f центрально-симметричны относительно точки $(1;\ 1{,}5)$.

38. $\psi_1'(-5{,}5) > 0.$

39. $\psi_1'(-5) < 0.$

40. $\varphi'(-4) > 0.$

41. Точка 0 является критической точкой функции ψ.

42. Точка -3 является критической точкой функции ψ_1.

43. Точки -6, -4, -3 являются критическими точками функции ψ_1.

44. Точка -1 является критической точкой функции f_1.

45. Точка 0 является точкой минимума функции φ.

46. Точки -6 и -3 являются точками максимума функции ψ_1.

47. Точка 0 является точкой максимума функции φ.

48. Точки -6 и -4 являются точками экстремума функции ψ_1.

49. Точки 0 и 2 являются точками экстремума функции φ.

50. График функции f_1 имеет центр симметрии.

51. График функции f_2 имеет центр симметрии.

52. График функции f_1 гомотетичен самому себе относительно начала координат (коэффициент гомотетии равен 2).

53. Функция f_2 не имеет ни одной экстремальной точки.

54. Точка 1,9999 является точкой максимума функции f_1.

55. Функция f_1 не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значения.

56. Функция ψ_1 не имеет наименьшего значения.

57. Функция φ в точке 2 достигает наименьшего значения.

58. Функция ψ не имеет наибольшего значения.

59. Неравенство $\psi'(x) < 0$ не имеет решений.

60. Уравнение $\varphi'(x) = 0$ имеет только одно решение.

61. Уравнение $\psi_1'(x) = 0$ имеет три решения.

62. Решением неравенства $\psi_1'(x) < 0$ является отрезок $[-6;\ -4]$.

63. Решением неравенства $\varphi'(x) < 0$ является только множество $(-\infty; -4]$.

64. Неравенство $f'(x) < 0$ не имеет решений.

65. Решением неравенства $\psi_1'(x) > 0$ является объединение двух интервалов.

66. График функции f_2 переводится в график функции f вектором $(4;\ 1)$.

67. График функции φ имеет ось симметрии.

68. $\lim\limits_{x \to 1} f_2(x) = 3$.

69. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

70. Биссектрисы второго и четвертого координатных углов являются осью симметрии графика функции ψ_2.

71. График функции ψ_2 имеет две оси симметрии.

72. График функции ψ_2 не имеет осей симметрии.

73. График функции ψ_2 имеет только одну ось симметрии.

74. Точка $(-5;\ 0)$ является центром симметрии графика функции ψ_1.

75. Существует единственное значение a, при котором уравнение $\psi'(x) = f(x) + a$ имеет решение.

76. Объединение графиков функций φ_1 и ψ является графиком немонотонной функции.

77. Объединение графиков функций f_2 и f является графиком монотонной функции.

78. Неравенства $f'(x) > 0$ и $f_1'(x) > 0$ равносильны.

79. $\varphi'(2) < 0$.

80. $\psi_1'(-4,9998) < 0$.

Номера правильных ответов каждый ученик записывает на отдельном листке бумаги. Таким образом учитель получает информацию о том, как каждый ученик усвоил только что изученную теорему, насколько глубоко он понимает ее содержание, кому необходимы дополнительные объяснения.

Задание 2. На рис. 19.3 изображены различные ломаные и многоугольники. Назвать номера чертежей на которых показаны: 1) многоугольник, имеющий три диагонали; 2) многоугольник, не имеющий диагоналей; 3) многоугольник, у которого две диагонали; 4) выпуклый многоугольник; 5) выпуклый четырехугольник; 6) простая замкнутая ломаная; 7) простая незамкнутая ломаная; 8) невыпуклый многоугольник, у которого только две диагонали; 9) невыпуклый многоугольник, у которого пять диагоналей; 10) многоугольник, у которого четыре внутренних угла; 11) граница выпуклого многоугольника; 12) многоугольник, у которого пять вершин.

Задание 3. Составить истинные утверждения из фраз *A, B, C*.

A: 1) разносторонний треугольник; 2) равнобедренный треугольник; 3) равносторонний треугольник.

B: 4) может быть; 5) не может быть;

C: 6) остроугольным; 7) прямоугольным; 8) тупоугольным.

Ученик на листке записывает ответы в таком виде: 146, 147, 148, 246, 247, 248, 346, 357, 358.

Задание 4. На рис. 19.4—19.17 изображены графики уравнений:

1) $x^3 + y - x = 0$; 2) $x - x^3 - |y| = 0$; 3) $y - 2 = x^3 - 3x$;
4) $|y| = 2 - 3x + x^3$; 5) $y = \sqrt{x^2 + 4}$; 6) $|y| = \sqrt{x^2 + 4}$;
7) $y = x^4 + 2x^2 - 3$; 8) $y = x^2 + 2x - 3|x + 1| + 3$;

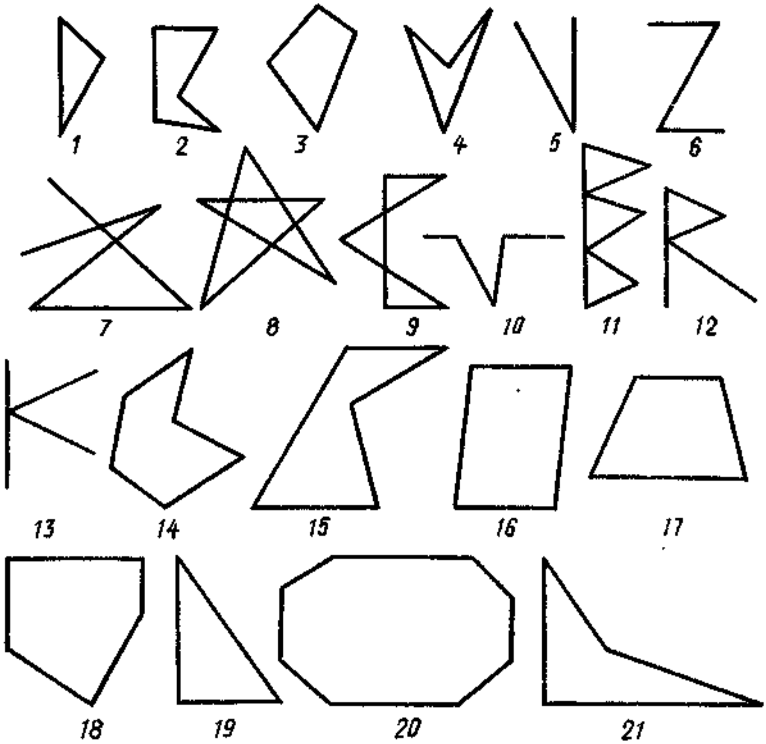


Рис. 19.3

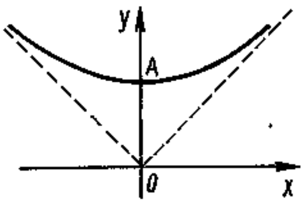


Рис. 19.4

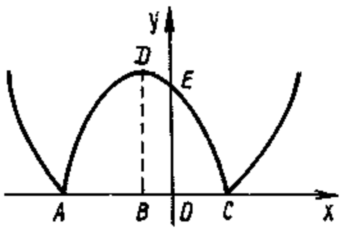


Рис. 19.5

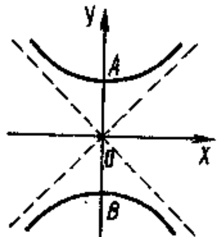


Рис. 19.6

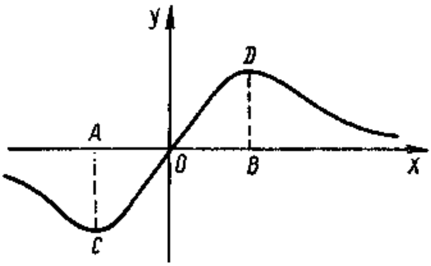


Рис. 19.7

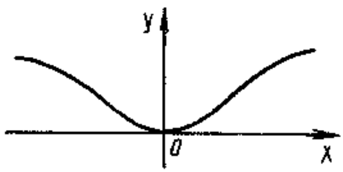


Рис. 19.8

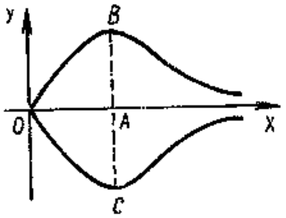


Рис. 19.9

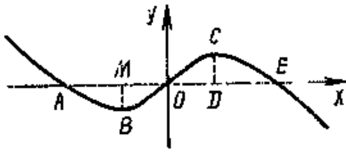


Рис. 19.10

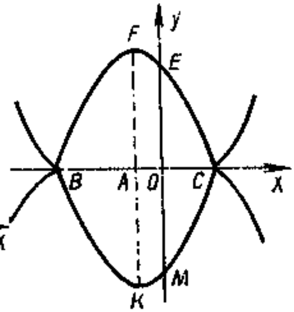


Рис. 19.11

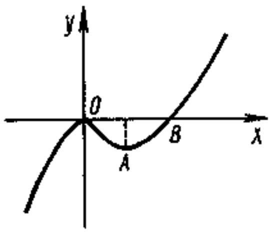


Рис. 19.12

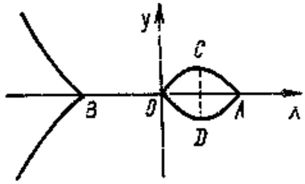


Рис. 19.13

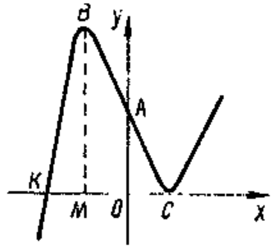


Рис. 19.14

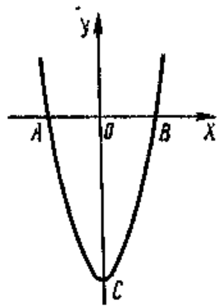


Рис. 19.15

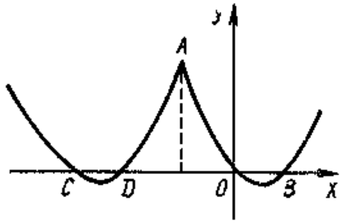


Рис. 19.16

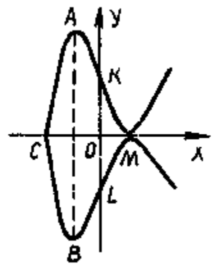


Рис. 19. 17

9) $y = \ln(x^2+1)$; 10) $y/(x-1) = |x|$; 11) $y = |x^2+x-2|$;
12) $|y| = |x^2+x-2|$; 13) $2x = y(1+x^2)$; 14) $|y|(1+x^2) = 2x$.

Назвать номера рисунков, на которых изображены графики соответствующих уравнений; уравнений, которые задают функции; уравнений, которые задают обратимые функции; уравнений, графиками которых являются данные кривые.

З а д а н и е 5. Назвать пункты, в которых верно указаны соответствующие свойства функции $f(x) = \dfrac{2}{1-x^2}$: 1) не имеет нулей; 2) отрицательна на множестве $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; 3) положительна на множестве $(-1; 1)$;

4) на множестве $(-1; 1)$ убывает; 5) на множестве положительных чисел возрастает; 6) существует предел в точке $x = 1$; 7) существует предел слева в точке $x = 1$; 8) существует предел справа в точке $x = -1$; 9) дифференцируема в точке $x = 0$; 10) производная в точке $x = 1$ равна нулю; 11) в каждой точке $(0; 1)$ производная положительна; 12) в каждой точке $(1; +\infty)$ производная отрицательна; 13) точка $x = 0$ является критической; 14) точка $x = 0$ является точкой минимума; 15) точка $x = 0$ является точкой экстремума; 16) в точке $x = 0$ функция достигает наименьшего значения.

З а д а н и е 6. Назвать множества, на которых данные равенства являются тождествами (табл. 19.1).

З а д а н и е 7. Назвать множество, которое является решением соответствующего неравенства (табл. 19.2).

Таблица 19.1

Равенство	Множества			
	A	*B*	*C*	*D*
$x = \sqrt{x^2}$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty]$	$(1; 3)$	$[-1; 0)$
$\sqrt{x\sqrt{2}} = 2$	$\{0{,}5\}$	$\{0\}$	$\varnothing$	$\{1\}$
$(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x})^2 = x^2$	$[0; +\infty)$	$\varnothing$	$\{0\}$	$(-1; 1)$
$\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2x$	$\{1\}$	$\varnothing$	$\{-1\}$	$\{0\}$
$\sin 2x = 0$	$\{0\}$	$[-\pi; \pi]$	$\varnothing$	$\left\{\dfrac{\pi n}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$

Таблица 19.2

Неравенство	Множества			
	A	*B*	*C*	*D*
$\sqrt{-x^2} < -1$	$\varnothing$	$(-\infty; 0)$	$(-\infty; -1)$	$\{0\}$
$\sqrt{-x}/(x-2) > 0$	$(-2; 0)$	$(-\infty; 0)$	$\varnothing$	$\{0\}$
$\sqrt{x-2} > \sqrt{4-x}$	$[3; +\infty)$	$[2; +\infty)$	$[3; 4]$	$(3; 4]$
$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} < 0$	$\varnothing$	$[0; +\infty)$	$[1; +\infty)$	$[0; 1)$

19.3. Проверка усвоения доказательств теорем

Усвоение учащимися доказательств теорем можно проверить с помощью следующих видов устных заданий.

I. Ученику предлагается чертеж, на котором отмечены свойства фигуры (под соответствующими номерами). Эти свойства надо расположить в таком порядке, чтобы в результате получилось доказательство теоремы.

Задание 1. Рис. 19.18 может служить иллюстрацией при доказательстве теоремы "Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне, а длина ее равна половине длины этой стороны". Нужно расположить отмеченные на чертеже свойства геометрической фигуры в таком порядке, в котором они используются при доказательстве этой теоремы.

Ответ. 2, 5, 1, 6, 4, 3.

II. Даются формулировка теоремы (с чертежом) и занумерованные математические утверждения. Среди них могут быть и такие, которые не имеют никакого отношения к доказательству данной теоремы. Необходимо из этих утверждений составить доказательство теоремы (выписать их номера в нужном порядке).

Задание 2. Дано: $ABCD$ – ромб Ф. Доказать: $S_{DB}(\Phi) = \Phi$ (рис. 19.19). Составить доказательство этой теоремы из следующих утверждений: 1) $C = S_{BD}(A)$; 2) $BA = AD, BC = DC$; 3) отрезок AB симметричен отрезку CB относительно прямой DB; 4) $S_{DB}(D) = D, S_{DB}(C) = A$; 5) отрезок AD симметричен отрезку CD относительно прямой DB; 6) $S_{DB}(B) = B, S_{DB}(A) = C$; 7) прямая AC перпендикулярна к BD; 8) граница ромба с помощью осевой симметрии относительно прямой DB переводится сама на себя; 9) $ABCD$ – параллелограмм; 10) $S_{DB}(\Phi) = \Phi$.

Ответ. 2, 1, 6, 3, 4, 5, 8, 10.

III. Дается формулировка теоремы и ее доказательство, в котором содержатся и лишние утверждения. Построить чертеж и найти лишние утверждения.

Задание 3. Дано: прямая AB параллельна прямым MN и CD, прямая CD не принадлежит плоскости ABM. Доказать, что прямые MN и CD параллельны.

Указать номер лишнего утверждения в приведенном ниже доказательстве теоремы и сделать чертеж к этому доказательству: 1) плоскости ABM и CDM пересекаются по прямой MK; 2) прямая a принадлежит плоскости α, прямая b

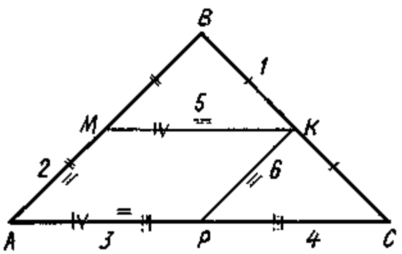


Рис. 19.18

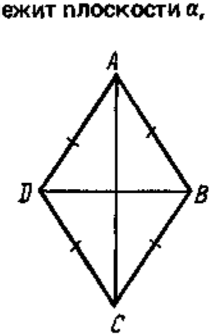


Рис. 19.19

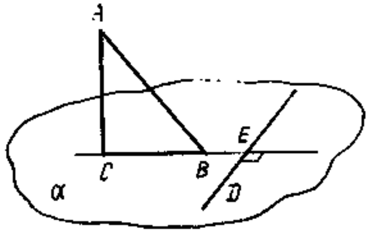


Рис. 19.20

принадлежит плоскости β и прямая c есть пересечение плоскостей α и β. Поэтому прямые c, a и b параллельны; 3) прямая MK параллельна прямым AB и CD; 4) через точку M проходит только одна прямая,параллельная прямой AB; 5) прямая MN не принадлежит плоскости ABC; 6) прямые MN и MK совпадают; 7) прямая MK параллельна прямой CD, поэтому прямая MN параллельна прямой CD.

Ответ. Утверждение 5 — лишнее.

IV. Дается доказательство теоремы, в котором пропущены отдельные утверждения, символы и т.п. Нужно заполнить пропуски.

З а д а н и е 4. Дано: прямая AC перпендикулярна к плоскости CBD, прямая DE перпендикулярна к прямой CB и принадлежит плоскости α. Доказать, что DE перпендикулярна к AB (рис. 19.20) .

Доказательство. Прямая AC перпендикулярна к прямой DE, потому что ... Прямая DE перпендикулярна к прямой AB, так как ... Прямая DE перпендикулярна к прямой AB, потому что...

Вместо пропусков поставить номер одного из следующих высказываний: 1) угол CED – прямой; 2) прямая DE перпендикулярна к прямой CB; 3) прямая AC перпендикулярна к прямой CB; 4) прямая DE не принадлежит плоскости ACB; 5) прямая AC перпендикулярна к плоскости CBD; 6) прямая DE перпендикулярна к плоскости ABC и прямая AB принадлежит плоскости ABC; 7) прямая DE перпендикулярна к прямым CB и AC.

Ответ. 5, 7, 6.

V. Предлагается доказательство теоремы, в котором все предложения занумерованы. Отдельные предложения содержат ошибки. Нужно назвать их номера.

VI. При повторении отдельных разделов школьного курса математики можно использовать приведенные ниже задания.

З а д а н и е 5. Назвать номера равенств (формул, свойств, понятий), которые применяются при выводе данного (например, 5-го) равенства.

1. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.	2. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.	4. $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha$.
5. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.	6. $\sin' x = \cos x$.
7. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1$.	8. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$.

9. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha.$ 10. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$

11. $\cos'\alpha=-\sin\alpha.$ 12. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha.$

13. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$

14. $(\operatorname{ctg}x=a)\Leftrightarrow(x=\operatorname{arcctg}a+k\pi,k\in\mathbf{Z}).$

15. $(\operatorname{tg}x=a)\Leftrightarrow(x=\operatorname{arctg}a+k\pi,k\in\mathbf{Z}).$

16. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$

17. $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},A(x_1;y_1),B(x_2;y_2).$

18. $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.$

19. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$

20. $(\cos x=a)\Leftrightarrow(x=\pm\arccos a+2k\pi,k\in\mathbf{Z},|a|\leqslant1).$

21. $(\sin x=a)\Leftrightarrow(x=(-1)^k\arcsin a+k\pi,k\in\mathbf{Z},|a|\leqslant1).$

22. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$

23. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$

24. $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

25. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$

26. $\cos\alpha=\cos(-\alpha).$ 27. $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha.$

28. $\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha.$ 29. $\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$

30. $\lim\limits_{\Delta x\to0}\cos(x+\Delta x)=\cos x.$ 31. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$

32. $\operatorname{tg}(\alpha\pm\pi)=\operatorname{tg}\alpha.$ 33. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha.$

34. $\cos(\alpha\pm2\pi)=\cos\alpha.$ 35. $\operatorname{tg}'x=\frac{1}{\cos^2x}.$

36. $\sin(\alpha\pm2\pi)=\sin\alpha.$ 37. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha.$

38. $\operatorname{ctg}(\alpha\pm\pi)=\operatorname{ctg}\alpha.$ 39. $\operatorname{ctg}'x=-\frac{1}{\sin^2x}.$

40. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$ 41. $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$

42. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha.$ 43. $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha.$

44. $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$ 45. $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$

46. $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha.$ 47. $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha.$

48. $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}.$ 49. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$

50. $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}.$ 51. $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$

52. $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}.$ 53. $\cos^2x=\frac{1+\cos2x}{2}.$

54. $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$ 55. $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha.$

56. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha.$ 57. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha.$

З а д а н и е 6. Возможные свойства функции $f(x)$ нумеруются.

Уравнение $f(x)=0$: 1) имеет одно решение; 2) имеет два решения; 3) не имеет решений; 4) имеет сколько угодно решений.

Уравнение $f'(x)=0$: 5) имеет одно решение; 6) имеет два решения; 7) не имеет решений; 8) имеет больше двух решений.

Функция $f(x)$: 9) положительная; 10) отрицательная; 11) возрастающая; 12) убывающая; 13) периодическая; 14) четная; 15) нечетная; 16) имеет предел в каждой точке ее определения; 17) непрерывная в каждой точке ее определения; 18) имеет наибольшее значение; 19) имеет наименьшее значение; 20) постоянная; 21) имеет критические точки; 22) имеет точки минимума; 23) имеет точки максимума; 24) ограниченная сверху; 25) ограниченная снизу; 26) неограниченная; 27) имеет положительную производную; 28) имеет отрицательную производную; 29) имеет производную в каждой точке ее определения.

Построить графики следующих функций и назвать номера указанных выше свойств, которыми они обладают: 1) $y=2x$, $x\in(-\infty;+\infty)$; 2) $y=2x$, $x\in(-\infty;0)$; 3) $y=2x$, $x\in[1;2)$; 4) $y=1/x$, $x\in(-\infty;0)$; 5) $y=1/x$, $x\in[-1;0)\cup(0;1]$; 6) $y=1/(x^2+1)$; 7) $y=|x-3|$; 8) $y=|x-3|$, $x\in[2;3)$.

20.1. Проверка решений алгебраических задач

Быстрая проверка тождественных преобразований алгебраических и тригонометрических выражений может быть выполнена следующим образом. Если выражение $f(a)$ тождественно равно выражению $\varphi(a)$, то все соответствующие значения этих выражений равны. Для вероятностной проверки правильности преобразований достаточно вычислить $f(a)$ и $\varphi(a)$ при двух-трех соответствующих значениях a.

П р и м е р 1. В результате преобразования получим

$$\frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha .$$

Вычисляем значения левой и правой частей равенства при некоторых "хороших" значениях α, например при $\alpha = 0°, 45, 60°$. Если при этих значениях α обе части равенства оказываются равными, можно с большой степенью вероятности утверждать, что данные выражения тождественно равны.

При преобразовании выражений вида

$$\frac{a-2}{a^2+2a} : \left(\frac{a}{a^2-2a} - \frac{a^2+4}{a^3-4a} - \frac{1}{a^2+2a} \right)$$

целесообразно упрощать отдельные части выражения, не переписывая их и осуществляя контроль каждого этапа способом, описанным выше:

$$1)\quad \frac{a}{a(a-2)} - \frac{a^2+4}{a(a-2)(a+2)} - \frac{1}{a(a+2)} =$$

$$= \frac{a^2+2a-a^2-4-a+2}{a(a-2)(a+2)} = \frac{a-2}{a(a-2)(a+2)} =$$

$$= \frac{1}{a(a+2)} ;$$

$$2)\quad \frac{a-2}{a(a+2)} : \frac{1}{a(a+2)} = a-2.$$

Такая запись решения экономична и позволяет осуществлять контроль каждого промежуточного действия. Вычислив, например, при $a = 1$ и $a = -1$ значение выражения, стоящего в скобках, и дроби $\frac{1}{a(a+2)}$, получим определенную уверенность в отсутствии ошибки.

При упрощении числовых выражений целесообразно пользоваться определенной схемой, сущность которой поясним примером.

Выполнить действия:

$$(204{,}12 \overset{(1)}{:} 40{,}5 \overset{(3)}{-} 3{,}2 \overset{(2)}{\cdot} 1{,}2) \overset{(4)}{\cdot} 6\frac{1}{2} \overset{(6)}{+} 7 \overset{(5)}{:} 2\frac{1}{3}.$$

Указав порядок действий, вычисления оформляют таким образом:

1) $20412 : 4050 = 5{,}04$;	1′) $5{,}04 \cdot 40{,}5 = 204{,}12$;
2) $3{,}84$;	2′) $3{,}84 : 1{,}2 = 3{,}2$;
3) $1{,}2$;	3′) $1{,}2 + 3{,}84 = 5{,}04$;
4) $1{,}2 \cdot 6{,}5 = 7{,}8$;	4′) $7{,}8 : 6{,}5 = 1{,}2$;
5) $7 : \frac{7}{3} = 3$;	5′) $3 \cdot 2\frac{1}{3} = 7$;
6) $7{,}8 + 3 = 10{,}8$;	6′) $10{,}8 - 3 = 7{,}8$.

Действия 1′—6′ являются обратными действиям 1—6. Они позволяют осуществлять поэтапный контроль выполнения задания. "Лишняя" работа не должна нас смущать, потому что при обучении арифметическим вычислениям число решенных примеров не является самоцелью.

Как не допустить потери корней уравнений при их преобразовании? При умножении или делении обеих частей уравнения необходимо следить за тем, чтобы выражение, на которое умножаются (делятся) обе части уравнения, не обращалось в нуль при том значении переменного, которое является корнем данного уравнения.

П р и м е р 2. После преобразования уравнение

$$\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$$

принимает вид

$$\sqrt{x-1}\,(2+x) = 4(x-1).$$

После деления обеих его частей на $\sqrt{x-1}$ получаем

$$2 + x = 4\sqrt{x-1}.$$

Если вовремя не заметить, что число 1 есть корень данного уравнения, то в результате такой операции мы потеряем его корень, равный единице.

Как найти посторонние корни уравнения, не содержащего параметров (при неравносильном его преобразовании)? Во-первых, до решения уравнения целесообразно найти множество, на котором определено данное уравнение. Во-вторых, посторонние корни обнаруживаются непосредственной их проверкой.

Как проверить правильность решения неравенства, не содержащего параметров (при неравносильном его преобразовании)? Проверяем корни соответствующего ему уравнения. Пусть данное неравенство $f(x) > 0$ определено, например, на $[a;\ b)$ и корни соответствующего ему уравнения x_1, x_2, x_3.

Проверяем методом интервалов, какой из промежутков $[a;\ x_1)$, $(x_1;\ x_2)$, $(x_2;\ x_3)$, $(x_3;\ b)$ является решением неравенства $f(x) > 0$.

Как проверить корни уравнения с параметрами? Параметрам необходимо придать отдельные числовые значения (в уравнении и в ответе) и осуществить непосредственную проверку корней при этих значениях параметров. Такая проверка носит вероятностный характер.

П р и м е р 3. Решив относительно x уравнение

$$2\sqrt{x^2-1} = x - \sqrt{x^2-a},$$

получим

$$x = \frac{4-a}{2\sqrt{2(2-a)}}, \quad 0 \leqslant a \leqslant \frac{4}{3}.$$

Ясно, что данное уравнение определено на $[0;\ +\infty)$. При отрицательных значениях a уравнение решений не имеет, потому что если $a < 0$, то $x^2 - a > x^2$ и $x - \sqrt{x^2-a} < 0$ (левая часть уравнения ни при каком значении x не может принимать отрицательных значений). Проверяем ответ при $a = 0{,}4/3{,}1$ $(1 \in [0;\ 4/3])$. В результате подстановки убеждаемся, что при $a = 1{,}5$ $(1{,}5 \notin [0;\ 4/3])$ уравнение решений не имеет.

Проверка решений неравенств с параметрами осуществляется методом интервалов (параметрам придаем некоторые значения).

Наиболее универсальным способом проверки решений уравнений и неравенств является исследование выражений, входящих в уравнение или неравенство, и построение графиков соответствующих функций. Это дает возможность еще до решения уравнения установить число его решений и т.д.

В ряде случаев наиболее надежным способом проверки решений уравнения (неравенства) является получение ответа другим методом. Учет в максимальной степени свойств соответствующих функций делает более рациональным любой способ проверки.

20.2. Проверка решений геометрических задач

Сформулируем несколько рекомендаций, позволяющих быстро проверять решения различных задач.

Проверку решения задачи на вычисление по планиметрии (без параметров) можно осуществить построением соответствующей фигуры и измерением ее элементов.

П р и м е р 1. Вычислить длину медианы AM треугольника ABC, у которого $AB = 12$ см, $BC = 13$ см, $CA = 14$ см.

Построив треугольник ABC и измерив отрезок AM, получим приближенное значение длины отрезка AM.

Проверить решение задачи на вычисление по планиметрии (с параметрами) можно следующими способами: а) решить задачу при некоторых значениях параметров и сравнить полученный результат с ответом в общем виде; б) решить задачу построением (при некоторых значениях параметров).

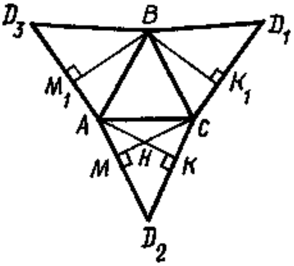


Рис. 20.1

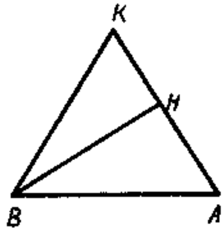


Рис. 20.2

П р и м е р 2. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle BAD = \alpha \leqslant 90°$, $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, $AB = a$, $AD = b$. Найти $x = \angle BAC$.

Полученное равенство $\operatorname{tg} x = (b - a\cos\alpha)/(a\sin\alpha)$ можно проверить: а) при $\alpha = 90°$ и $a = b$ или $\alpha = 60°$ и $a = b$; б) построив четырехугольник $ABCD$, придав α, a и b некоторые числовые значения и измерением найдя приближенное значение угла BAC.

Правильность решения задачи на построение по планиметрии (с параметрами) проверяется путем построения искомой фигуры при различных значениях данных параметров.

Правильность решения задачи на вычисление по стереометрии (без параметров) может быть проверена построением развертки соответствующей пространственной фигуры и последующим измерением отрезков и углов. Можно решить такую же задачу, заменив некоторые числовые данные параметрами.

П р и м е р 3. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ с основанием ABC сторона $AB = 4$ см, $AD = 6$ см. Плоскость α проходит через точку A и перпендикулярна к прямой CD. Плоскость β проходит через точку C и перпендикулярна к прямой AD. Точка H есть пересечение плоскостей ACD, β и α. Найти длину отрезка HB.

Строим развертку пирамиды $DABC$ (рис. 20.1), а затем треугольник BKA и отрезок BH (рис. 20.2). Измерением находим: $BH \approx 3{,}4$ см.

Точный ответ: $BH = \sqrt{11{,}5}$ (ошибка измерения меньше 1 мм).

Проверка решения задачи на вычисление по стереометрии (с параметрами) проводится так же, как и проверка аналогичных задач по планиметрии.

Александров И.И. Сборник геометрических задач на построение. — М.: Учпедгиз, 1954. — 176 с.

Башмаков М.И. Уравнения и неравенства. — М.: Наука, 1976. — 96 с.

Беляева В.С., Монахов В.М. Экстремальные задачи. — М.: Просвещение, 1977. — 96 с.

Болтянский В.Г. Анализ — поиск решения задачи // Математика в школе. — 1974. — № 1. — С. 34—40.

Василевский А.Б. Метод параллельных проекций. — Мн.: Нар. асвета, 1985. — 128 с.

Василевский А.Б. Методы решения геометрических задач. — Мн.: Выш. шк., 1969. — 232 с.

Василевский А.Б. Методы решения задач. — Мн.: Выш. шк., 1974. — 240 с.

Василевский А.Б. Методы решения задач по математике. — Мн.: ГПИ им. А.М. Горького, 1981. — 108 с.

Василевский А.Б. Обучение решению задач. — Мн.: Выш. шк., 1979. — 192 с.

Василевский А.Б. Параллельные проекции и решение задач по стереометрии. — Мн.: Нар. асвета, 1978. — 104 с.

Василевский А.Б. Стереометрические задачи на готовых чертежах. — Мн.: ГПИ им. А.М. Горького, 1982. — 24 с.

Василевский А.Б. Устные упражнения по алгебре и началам анализа. — Мн.: Нар. асвета, 1981. — 72 с.

Василевский А.Б. Устные упражнения по геометрии. — Мн.: Нар. асвета, 1983. — 80 с.

Вересова Е.Е., Денисова Н.С., Полякова Т.Н. Практикум по решению математических задач. — М.: Просвещение, 1979. — 232 с.

Волхонский А.И. Об исследовании задач по стереометрии // Математика в школе. — 1955. — № 4. — С. 23—25.

Выгодский М.Я., Рабинович В.Л. Некоторые принципиальные вопросы, связанные с решением конструктивных задач // Математика в школе. — 1965. — № 4. — С. 27—35.

Габович И.Г. О поиске планов решений геометрических задач // Математика в школе. — 1983. — № 1. — С. 34—40.

Гильде В., Альтрихтер З. С микрокалькулятором в руках. — М.: Мир, 1980. — 222 с.

Готман Э.Г., Скопец З.А. Решение геометрических задач аналитическим методом. — М.: Просвещение, 1979. — 128 с.

Данилов Е.Ф. Как помочь учащимся находить путь к решению геометрических задач. — М.: Учпедгиз, 1961. — 143 с.

Дорофеев Г.В. О задачах с параметрами, предлагаемых на вступительных экзаменах в вузы // Математика в школе. — 1983. — № 4. — С. 24—28.

Дорофеев Г.В. Применение производных при решении задач в школьном курсе математики // Математика в школе. — 1980. — № 5. — С. 12—21; № 6. — С. 24—30.

Зобкова К.В., Лященко Е.И., Новосельцева З.И. Методика проведения "Практикума по решению задач" (на материале алгебры). — Л.: ГПИ им. А.И. Герцена, 1980. — 76 с.

Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике: В 2 ч. — М.: Просвещение, 1977. Ч. 1: Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. — 96 с.

Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике: В 2 ч. — М.: Просвещение, 1977. Ч. 2: Обучение математике через задачи и обучение решению задач. — 120 с.

Колягин Ю.М., Оганесян В.А. Учись решать задачи. — М.: Просвещение, 1980. — 96 с.

Крайзман М.Л. Решение геометрических задач методом координат. — Киев: Рад. шк., 1983. — 127 с.

Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по решению математических задач. Алгебра. Тригонометрия. — М.: Просвещение, 1984. — 288 с.

Литвиненко В.Н. Практикум по решению задач школьной математики. — М.: Просвещение, 1982. — Вып. IV: Геометрия. — 159 с.

Мазаник А.А. Обучение учащихся решению задач на построение по планиметрии. — Мн.: Нар. асвета, 1960. — 140 с.

Маслова Г.Г. Методика обучения решению задач на построение в восьмилетней школе. — М.: Просвещение, 1961. — 152 с.

Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, В.Я. Саннинский. — М.: Просвещение, 1980. — 432 с.

Нестеренко Ю.А., Олехник С.Н., Потапов М.К. Задачи на вступительных экзаменах по математике. — М.: Наука, 1983. — 448 с.

Пойа Д. Как решать задачи. — М.: Наука, 1961. — 207 с.

Пойа Д. Математическое открытие. — М.: Наука, 1976. — 452 с.

Стратилатов П.В. Приближенные вычисления в курсе геометрии восьмого класса // Повышение вычислительной культуры учащихся средней школы. — М.: Просвещение, 1965. — С. 32–42.

Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи. — М.: Просвещение, 1984. — 175 с.

Яглом И.М. Геометрические преобразования. — М.: Наука, 1955. — Ч. 1. — 611 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Василевский Александр Борисович

ОБУЧЕНИЕ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Заведующий редакцией *Е.В. Сукач*
Редактор *Л.Н. Базулько*
Младшие редакторы *В.М. Кушилевич, Т.И. Крючкова*
Художественный редактор *Ю.С. Сергачев*
Технический редактор *Л.И. Счисленок*
Корректор *В.В. Неверко*
Оператор *И.В. Скубий*

ИБ № 2518

Подписано в печать с оригинала-макета 2.02.1988. Формат 60x90 1/16. Бумага офсет. Офсет. печать. Гарнитура Универс. Усл. печ.л. 16. Усл. кр.-отт. 16,25. Уч.-изд.л. 17,49. Тираж 11 300 экз. Зак. 5044. Цена 75 к.

Издательство "Вышэйшая школа" Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220048, Минск, проспект Машерова, 11.
Типография "Победа". 222310, Молодечно, ул. Тавлая, 11.

75 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»

75 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»